MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY †
G. HERGLOTZ H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

51. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 31. JULI 1948)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1948

Math.
Z.

Über die Erweiterungsfähigkeit der Hilbertschen Modulgruppe.

Von

H. Maaß in Heidelberg.

Unter einer hyperabelschen Transformation S verstehen wir n simultane Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha^{(\nu)} & \beta^{(\nu)} \\ \gamma^{(\nu)} & \delta^{(\nu)} \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

mit reellen $\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}, \gamma^{(\nu)}, \delta^{(\nu)}$ und der Determinante $\alpha^{(\nu)}\delta^{(\nu)} - \beta^{(\nu)}\gamma^{(\nu)} = 1$. Für S wählen wir die abkürzende Bezeichnung

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{1}$$

und kommen überein, daß eine Relation zwischen Größen, die ihrer Natur nach mit dem Konjugiertenindex ν behaftet sein müssen, in gleicher Weise für alle Konjugierten gilt, wenn der Index ν nicht mit angegeben ist. Unsere Forderungen bezüglich S lauten also:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ reell und } \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{2}$$

Wir wählen n komplexwertige Veränderliche $\tau^{(\nu)} (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und bezeichnen mit $\mathfrak{T}$ den Bereich

$$\mathfrak{Im}\, \tau > 0. \tag{3}$$

Die hyperabelsche Transformation S bildet $\mathfrak{T}$ vermöge

$$\tau \to \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \tag{4}$$

auf sich ab. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von hyperabelschen Transformationen ist in $\mathfrak{T}$ dann und nur dann diskontinuierlich, wenn $\mathfrak{G}$ keine infinitesimalen Transformationen enthält, d. h. wenn es in $\mathfrak{G}$ keine gegen die Identität konvergierende Folge von Transformationen gibt [1]). Wenn im folgenden von maximalen diskontinuierlichen Erweiterungsgruppen $\mathfrak{G}$ die Rede sein wird, so ist damit gemeint, daß $\mathfrak{G}$ als Abbildungsgruppe für $\mathfrak{T}$ keiner diskontinuierlichen Erweiterung mehr fähig ist. Somit wird also

[1]) H. Maass, Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse 1940, 2. Abhandlung.

die Frage gar nicht berührt, ob **G** die Transformationen E_k $(k=1,2,\ldots,n)$, definiert durch

$$(5) \qquad E_k^{(k)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_k^{(\nu)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für } \nu \neq k,$$

und ihre Potenzprodukte enhält. Wir werden bei unseren Betrachtungen ohne diese Transformationen auskommen, indem wir festsetzen, daß stets $\sqrt{\omega} > 0$ sein soll, wenn $\omega > 0$ ist (für alle Konjugierten von ω).

Die (engere) Hilbertsche Modulgruppe **M** zu einem total reellen Zahlkörper Z vom Grad n besteht aus den Transformationen (1) mit ganzzahligen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \subset Z$ und $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Die Konjugierten von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind nun im gewöhnlichen Sinne der algebraischen Zahlentheorie zueinander konjugiert. **M** ist in $\mathfrak{T}$ diskontinuierlich. Die Frage nach den diskontinuierlichen Erweiterungsgruppen von **M** wird in dieser Note vollständig beantwortet. Wir bezeichnen mit **H** die schon von Hurwitz angegebene Gruppe der Transformationen

$$(6) \qquad S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\omega}} & \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}} & \frac{\delta}{\sqrt{\omega}} \end{pmatrix},$$

wobei die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$ in Z derart zu wählen sind, daß die Koeffizienten von S *ganz* algebraisch werden und $\alpha\delta - \beta\gamma = \omega > 0$ gilt. Es ergibt sich dann folgendes Resultat: *Jede diskontinuierliche Erweiterungsgruppe von* **M** *ist in* **H** *enthalten;* **H** *ist demnach die einzige maximale diskontinuierliche Erweiterungsgruppe von* **M**.

Die wesentlichen Begriffsbildungen und Hilfsmittel zum Beweis dieses Satzes sind in [1]) entwickelt worden. Es sei an die Definition einer parabolischen Spitze erinnert. In einer vorgelegten diskontinuierlichen Gruppe **G** bestimme man die Untergruppe der affinen Transformationen

$$(7) \qquad S = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha\lambda^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Kommen unter diesen n unabhängige Translationen ($\lambda^2 = 1$) und $n-1$ hyperbolische Transformationen mit unabhängigen Multiplikatoren λ^2 vor, so heißt $\infty = \{\infty, \ldots, \infty\}$ parabolische Spitze von **G**. Wir setzen fest, daß der Begriff der parabolischen Spitze gegenüber Transformationen von $\mathfrak{T}$ in sich invariant sein soll. Die Bezeichnung Translation ($\lambda^2 = 1$) verwenden wir gleichzeitig für S und α.

Folgende Bemerkung wird uns gelegentlich von Nutzen sein. Die Transformation

$$(8) \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sei in einer vorgelegten Transformationsgruppe **G** enthalten. Das ist

z. B. der Fall, wenn $\mathbf{M} \subset \mathbf{G}$ ist. Gilt dann für einen festen Koeffizienten bzw. für eine feste Zeile oder Spalte einer beliebigen Transformation aus $\mathbf{G}$ eine gewisse Aussage, so ist diese auch für alle Koeffizienten bzw. alle Zeilen und Spalten der Transformationsmatrix richtig. Das folgt im wesentlichen daraus, daß $\mathbf{G}$ mit (1) auch

$$(9) \quad TS = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}, \quad ST^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad TS^{-1}T^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

enthält.

Wir legen noch folgende Bezeichnungen fest: Es sei
h die Idealklassenzahl von Z,
$\mathfrak{o}$ der Bereich der ganzen Zahlen in Z,
$\mathfrak{a}_i\,(i = 1, 2, \ldots, h)$ ein volles Repräsentantensystem der Idealklassen von Z. $\mathfrak{a}_i$ werde erzeugt von den Körperzahlen γ_i, δ_i; die Zahlen α_i, β_i seien in Z derart bestimmt, daß $\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1$ ist. Schließlich sei

$$(10) \qquad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^{h} S_i \mathbf{M}, \quad S_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}.$$

Mit $\underline{S}$ bezeichnen wir die zweite Zeile der Transformation S, und $\mathbf{N}$ verwenden wir als Normzeichen in der üblichen Weise.

Der Beweis des oben formulierten Satzes wird nun auf eine Reihe von Hilfssätzen reduziert.

Hilfssatz 1. *Sind* $\infty = \{\infty, \ldots, \infty\}$ *und* $A^{-1}\infty$ *parabolische Spitzen einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe* $\mathbf{G}$ *und ist*

$$S \subset A\mathbf{G}, \quad \underline{S} = (\gamma, \delta),$$

so ist entweder $\gamma = 0$ *oder* $|\mathbf{N}\gamma| > \varkappa_1 > 0$ *mit einer nur von* A *und* $\mathbf{G}$ *abhängigen positiven Konstanten* $\varkappa_1$.

Beweis: s. [1]) S. 13.

Hilfssatz 2. *Es sei* $\mathbf{G}$ *Untergruppe einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe* $\mathbf{G}_1$ *und* ∞ *parabolische Spitze von* $\mathbf{G}$ *(also auch von* $\mathbf{G}_1$*). Mit* $\mathbf{A}$ *bzw.* $\mathbf{A}_1$ *bezeichnen wir die affinen Untergruppen von* $\mathbf{G}$ *und* $\mathbf{G}_1$. *Dann läßt sich der Multiplikator* λ_1^2 *einer Transformation aus* $\mathbf{A}_1$ *als Quotient zweier Translationen* ϱ *und* σ *aus* $\mathbf{A}$ *darstellen:*

$$(11) \qquad \lambda_1^2 = \frac{\varrho}{\sigma}.$$

Die Konjugierten von λ_1^2 *sind algebraische Einheiten.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz einer nur von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{G}_1$ abhängigen natürlichen Zahl m derart, daß das m-fache $m\varrho_1$ einer Translation ϱ_1 aus $\mathbf{A}_1$ eine Translation ϱ aus $\mathbf{A}$ wird. Dazu wählen wir eine Basis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ für die Translationen in $\mathbf{A}$ und machen den Ansatz

$$\varrho = \sum_{i=1}^{n} x_i\omega_i, \quad \varrho_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\omega_i$$

mit ganzrationalen x_i und reellen ξ_i. Zu vorgegebenem positiven ε lassen sich die ganzrationalen Zahlen $m, x_1, \ldots, x_n$ so bestimmen, daß

$$m > 0, \quad |m\xi_i - x_i| < \varepsilon \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Bei kleinem ε ist dann $m\xi_i = x_i$ zu schließen, da $\mathbf{G}_1$ keine inifinitesimalen Translationen von der Art $m\varrho_1 - \varrho$ enthält. Da die Translationen in $\mathbf{A}_1$ eine n-gliedrige Basis besitzen, kann die natürliche Zahl m offenbar so gewählt werden, daß generell für alle ϱ_1 die Translation $m\varrho_1 = \varrho$ in $\mathbf{A}$ liegt. Wenn nun

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} \lambda & \sigma_1 \lambda^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu \lambda_1^{-1} \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix} \subset \mathbf{A}_1, \quad \lambda^2 = 1,$$

dann liegt auch

$$(13) \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu \lambda_1^{-1} \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \sigma_1 \lambda^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & -\mu \lambda_1^{-1} \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_1^2 \sigma_1 \lambda^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

in $\mathbf{A}_1$; d. h. mit σ_1 ist auch $\varrho_1 = \lambda_1^2 \sigma_1$ eine Translation in $\mathbf{A}_1$. Daraus ergibt sich nun leicht, wie in [1]) näher ausgeführt ist, daß die Konjugierten von λ_1^2 algebraische Einheiten darstellen. $\varrho = m\varrho_1$ und $\sigma = m\sigma_1$ sind Translationen in $\mathbf{A}$, so daß $\lambda_1^2 = \frac{\varrho}{\sigma}$ ist, q. e. d.

Hilfssatz 3. *Sind γ^*, δ^* zwei nicht zugleich verschwindende Zahlen aus $\mathfrak{o}$, dann gibt es eine Transformation $S_0 \subset \mathbf{K}$ derart, daß*

$$(14) \qquad \underline{S_0} = (\gamma_0, \delta_0), \quad \gamma_0 = \varrho\gamma^*, \quad \delta_0 = \varrho\delta^*, \quad |\varrho| < \varkappa_2$$

mit einer nur von Z abhängigen positiven Konstanten $\varkappa_2$.

Beweis: s. [1]) S. 20.

Hilfssatz 4. *Wenn $\mathbf{M}$ Untergruppe einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe $\mathbf{G}$ ist, dann ist jede Transformation S aus $\mathbf{G}$ von der Gestalt*

$$(15) \qquad S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\omega}} & \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}} & \frac{\delta}{\sqrt{\omega}} \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega \subset Z, \ \omega > 0.$$

Überdies gibt es eine feste nur von $\mathbf{G}$ abhängige algebraische Zahl μ derart, daß μS ganze algebraische Koeffizienten hat; d. h. die Transformationen von $\mathbf{G}$ haben beschränkte Nenner.

Beweis. Zu einer Transformation

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \mathbf{G}$$

bestimmen wir $\gamma^*, \delta^* \subset \mathfrak{o}$ derart, daß

$$|\gamma^* a + \delta^* c| < \frac{\sqrt[n]{\varkappa_1}}{\varkappa_2}, \quad (\gamma^*, \delta^*) \neq (0, 0).$$

Nach Hilfssatz 3 gibt es dann eine Transformation $S_0 = S_i L \subset \mathbf{K}$ $(L \subset \mathbf{M})$ mit $\underline{S_0} = (\gamma_0, \delta_0)$, so daß $\underline{S_0} S = (\gamma_0 a + \delta_0 c, *)$ ist mit

$$|\mathsf{N}(\gamma_0 a + \delta_0 c)| = |\mathsf{N}\varrho|\,|\mathsf{N}(\gamma^* a + \delta^* c)| < \varkappa_1.$$

Zufolge Hilfssatz 1 ist dann $\gamma_0 a + \delta_0 c = 0$ oder auch

$$a = \alpha r, \quad c = \gamma r \quad \text{mit} \quad \alpha, \gamma \subset Z.$$

Auf Grund einer eingangs gemachten Bemerkung können wir nun schließen, daß

$$S = \begin{pmatrix} \alpha r & \beta s \\ \gamma r & \delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} u & \tilde{\beta} u \\ \tilde{\gamma} v & \tilde{\delta} v \end{pmatrix}$$

ist, wobei die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ in Z liegen. Sind die Koeffizienten einer Zeile von S beide von 0 verschieden, so folgt $s = \mu r$, $\mu \subset Z$, so daß wir $r = s$ annehmen können. Die Determinantenrelation $ad - bc = 1$ zieht dann

$$r = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \quad \text{mit} \quad \omega = \alpha\delta - \beta\gamma > 0$$

nach sich. Es bleibt noch $b = c = 0$ und $a = d = 0$ zu diskutieren. Wir dürfen uns offenbar auf den ersten Fall beschränken. a^2 ist dann der Multiplikator einer affinen Transformation und als solcher nach Hilfssatz 2 eine Einheit ω in Z, so daß $a = \frac{\omega}{\sqrt{\omega}}$, $d = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ ist. Der erste Teil des Hilfssatzes ist damit bewiesen.

Wir wählen nun eine feste Transformation $Q_i \subset \mathbf{G}$ derart, daß

$$S_i Q_i = \begin{pmatrix} \mu_i & * \\ 0 & \mu_i^{-1} \end{pmatrix} \tag{16}$$

ist. Mit

$$S_0 S = S_i L S = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \tag{17}$$

wird

$$Q_i^{-1} L S = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\mu_i} & * \\ 0 & \frac{\mu_i}{\lambda} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

und diese Transformation liegt in $\mathbf{G}$. Hilfssatz 2 besagt dann, daß $\frac{\lambda^2}{\mu_i^2} = \varepsilon$ eine Einheit in Z ist. Aus

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = L^{-1} S_i^{-1} \begin{pmatrix} \mu_i \sqrt{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

ersehen wir schließlich, daß a, c beschränkte Nenner haben; denn für i kommen höchstens h-Werte in Frage. Da die Beschränktheit der Nenner auch für b, d ausgesprochen werden kann, ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Hilfssatz 5. *Sei* $\mathfrak{M}$ *Untergruppe einer Transformationsgruppe* $\mathfrak{G}$. *Die Koeffizienten der Transformationen aus* $\mathfrak{G}$ *mögen in* Z *liegen und beschränkte Nenner haben, dann ist* $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}$.

Beweis. Es werde angenommen, daß $\mathfrak{G}$ eine Transformation

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

mit gebrochenen Koeffizienten enthält. Daraus ist ein Widerspruch abzuleiten. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, daß α ein gewisses Primideal $\mathfrak{p}$ in einer negativen Vielfachheit e_α enthält und daß die Vielfachheiten e_β, e_γ, e_δ, mit denen $\mathfrak{p}$ in β, γ, δ steckt, mindestens so groß sind wie e_α:

$$e_\alpha \leqq e_\beta, e_\gamma, e_\delta.$$

Indem wir S durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varrho & 1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + \alpha\sigma \\ \gamma + \alpha\varrho & \delta + \gamma\sigma + \beta\varrho + \alpha\varrho\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}$$

ersetzen, kann durch geeignete Wahl von $\varrho, \sigma \subset \mathfrak{v}$ in jedem Falle erreicht werden, daß

$$e_\alpha = e_{\alpha^*}, \quad e_\alpha < e_{\beta^*}, \quad e_\alpha < e_{\gamma^*}, \quad e_\alpha \leqq e_{\delta^*}$$

ist. Wir wollen demnach annehmen, daß bereits

$$e_\alpha < e_\beta, e_\gamma \quad \text{und} \quad e_\alpha \leqq e_\delta$$

gilt, und erkennen dann, daß die Nenner der Koeffizienten von S^m $(m \to \infty)$ bezüglich $\mathfrak{p}$ nicht beschränkt sind. Das ist mit den Voraussetzungen für $\mathfrak{G}$ nicht verträglich, q. e. d.

Hilfssatz 6. *Sei* $\mathfrak{M}$ *Untergruppe einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe* $\mathfrak{G}$, *dann ist* $\mathfrak{M}$ *Normalteiler von* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Sei $S \subset \mathfrak{G}$, $L \subset \mathfrak{M}$. Nach Hilfssatz 4 liegen die Koeffizienten der Transformation SLS^{-1} in Z. Die Transformationen der aus SLS^{-1} und $\mathfrak{M}$ erzeugten Gruppe $\mathfrak{G}_1$ haben beschränkte Nenner, da $\mathfrak{G}_1$ in $\mathfrak{G}$ liegt und die Aussage für $\mathfrak{G}$ zutrifft. Nach Hilfssatz 5 ist dann $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{M}$, also $SLS^{-1} \subset \mathfrak{M}$, q. e. d.

Hilfssatz 7. *Sei* $\mathfrak{M}$ *Normalteiler einer Transformationsgruppe* $\mathfrak{G}$, *dann ist* $\mathfrak{G}$ *in* $\mathfrak{H}$ *enthalten.*

Beweis. Sei

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \mathfrak{G},$$

so daß

$$S \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - ac & a^2 \\ -c^2 & 1 + ac \end{pmatrix} \subset \mathfrak{M}, \tag{20}$$

also ac, $c^2 \subset \mathfrak{o}$ ist. Da c vor den anderen Koeffizienten nicht ausgezeichnet ist, ergibt sich, daß alle Koeffizienten von S ganz algebraisch

sind. Überdies ist aus analogen Gründen auch $dc \subset \mathfrak{o}$, und aus $ac \cdot dc - bc \cdot c^2 = c^2$ ersehen wir, daß $bc \subset \mathfrak{o}$ ist. Mithin liegen die Zahlen $\alpha = ac$, $\beta = bc$, $\gamma = c^2$, $\delta = dc$ und $\omega = c^2$ in $\mathfrak{o}$, so daß unter der unwesentlichen Voraussetzung $c \neq 0$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\omega}} & \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}} & \frac{\delta}{\sqrt{\omega}} \end{pmatrix} \subset \mathfrak{H}$$

zu schließen ist, q. e. d.

Satz. *Sei* $\mathfrak{M}$ *Untergruppe einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe* $\mathfrak{G}$. *Dann ist*

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}, \tag{21}$$

d. h. $\mathfrak{H}$ *ist die maximale diskontinuierliche Erweiterungsgruppe von* $\mathfrak{M}$. *Die Faktorgruppe* $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$ *ist isomorph der Gruppe der singulären total positiven Zahlverbände in* $\mathfrak{Z}$. *Die Ordnung der Faktorgruppe ist*

$$(\mathfrak{H} : \mathfrak{M}) = 2^{e_0}, \tag{22}$$

wobei e_0 *die zu* 2 *gehörige Basiszahl der engeren Idealklassengruppe von* $\mathfrak{Z}$ *ist.*

Beweis. $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$ ergibt sich sofort aus den Hilfssätzen 6 und 7. Zwischen den Restklassen S mod $\mathfrak{M}$ der Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$ und den zu ω gehörigen Zahlverbänden besteht zufolge (6) offenbar eine eineindeutige isomorphe Beziehung. Aus (6) ergibt sich auch die Idealgleichung $\mathfrak{a} = (\alpha, \beta) = (\sqrt{\omega})$; also ist $\omega = \mathfrak{a}^2$ eine singuläre total positive Zahl. Die oben angegebene Ordnung der Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$ wird aus bekannten Relationen der algebraischen Zahlentheorie ermittelt.

Nach einer Bemerkung von Herrn Petersson hat Herr Hecke einen (unveröffentlichten) Beweis dafür erbracht, daß die rationale Modulgruppe nicht erweiterungsfähig ist. Herr Petersson hat als erster die Frage nach der Erweiterungsfähigkeit von Grenzkreisgruppen in voller Allgemeinheit aufgeworfen und sie für eine umfangreiche Klasse von derartigen Gruppen mit elementar-arithmetischen Methoden beantwortet[2]).

[2]) H. Petersson, Über die eindeutige Bestimmung und die Erweiterungsfähigkeit von gewissen Grenzkreisgruppen, Hamburger Abhandlungen **12** (1938), S. 180—199.

(Eingegangen am 4. Oktober 1944.)

Über die Dichte des Potentials einer räumlichen Belegung.

Von

G. G. Lorentz in Tübingen.

Es sei die Funktion $f(x)$ in einem Gebiet G des dreidimensionalen Raumes L-integrierbar. Dann existiert für fast alle Punkte x des Raumes das Potential der räumlichen Belegung mit der Dichte $f(x)$,

$$u(x) = \int_G \frac{f(y)}{|y-x|}\, dy, \tag{1}$$

wobei $|y-x|$ die Entfernung der Punkte x und y voneinander bedeutet. Ist die Dichte $f(x)$ in G stetig differenzierbar, so kann sie bei gegebenem Potential $u(x)$ mit Hilfe der Gleichung von Poisson

$$\Delta u(x) = -4\pi f(x) \tag{2}$$

berechnet werden. Wir wollen zeigen, daß diese Gleichung auch im allgemeinen Fall besteht, wenn Δu in (2) durch den *verallgemeinerten Laplaceschen Operator* $\Delta^* u$ ersetzt wird. Damit wird für die Potentiale der Form (1) eine Frage von F. Riesz[1]) beantwortet.

Bildet man für die Kugel $K_h(x)$ um den Punkt x vom Radius h den Ausdruck

$$\Delta_h u(x) = \frac{1}{K_h} \int_{K_h(x)} u(y)\, dy - u(x),$$

in dem K_h das Volumen der Kugel bedeuten soll, so ist $\Delta^* u$ durch

$$\Delta^* u(x) = \lim_{h \to 0} \frac{10}{h^2} \Delta_h u(x)$$

definiert[2]). Es gilt folgender

Satz. *Ist die Dichte $f(x)$ L-integrierbar in G, so ist dort fast überall*

$$\Delta^* u(x) = -4\pi f(x). \tag{3}$$

---

[1]) T. Radó, Subharmonic functions, Berlin 1937, S. 45, § 6. 20; vgl. auch F. Riesz, Acta Mathem. **54**, S. 321, Fußnote, (1930).

[2]) Für zweimal stetig differenzierbare $u(x)$ existiert $\Delta^* u$ und ist mit Δu identisch; vgl. z. B. Blaschke, Berichte Verh. der Gesellschaft der Wiss., Leipzig 68 (1916), S. 3—7.

Hilfssatz. *Es sei* $f(x) \geqq 0$ *und L-integrierbar für* $r = |x| \leqq h$, $\varphi(r) \geqq 0$ *für* $0 < r \leqq h$ *definiert und monoton nicht zunehmend. Dann ist*

$$\int_{|x| \leqq h} f(x)\,\varphi(r)\,dx \leqq 64\,M \int_0^h \varphi(r)\,r^2\,dr$$

mit

$$M = \overline{\operatorname{fin}}_{0 < r \leqq h} \left\{ \frac{1}{r^3} \int_{|x| \leqq r} f(x)\,dx \right\}.$$

In der Tat, es sei $h_k = \frac{h}{2^k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leqq h} f\varphi\,dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{h_{k+1} < |x| \leqq h_k} f\varphi\,dx \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(h_{k+1}) \int_{|x| \leqq h_k} f\,dx \\ &\leqq \sum_{k=0}^{\infty} M h_k^3 \varphi(h_{k+1}) = 4^3 M \sum_{k=0}^{\infty} h_{k+2}^2 \varphi(h_{k+1})(h_{k+1} - h_{k+2}) \\ &\leqq 64\,M \sum_{k=0}^{\infty} \int_{h_{k+2}}^{h_{k+1}} \varphi(r)\,r^2\,dr \leqq 64\,M \int_0^h \varphi(r)\,r^2\,dr. \end{aligned}$$

Beweis des Satzes. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_h} \int_{K_h(x)} u(y)\,dy &= \frac{1}{K_h} \int_{|y-x| \leqq h} dy \int_G \frac{f(z)}{|z-y|}\,dz \\ &= \int_G f(z)\,dz \frac{1}{K_h} \int_{|y-x| \leqq h} \frac{dy}{|z-y|}. \end{aligned}$$

Ersetzt man hier das letzte Integral durch den Wert

$$\frac{1}{K_h} \int_{|y-x| \leqq h} \frac{dy}{|z-y|} = \begin{cases} \dfrac{1}{|z-x|} & \text{für} \quad |z-x| \geqq r \\ \dfrac{1}{K_h}\left(2\pi h^2 - \dfrac{2\pi}{3}|z-x|^2\right) & \text{für} \quad |z-x| < r, \end{cases}$$

so wird

$$\begin{aligned} \Delta_h u(x) &= \frac{1}{K_h} \int_{K_h(x)} u(y)\,dy - u(x) \\ &= \int_G f(z) \left\{ \frac{1}{K_h} \int_{|y-x| \leqq h} \frac{dy}{|z-y|} - \frac{1}{|z-x|} \right\} dz \\ &= \int_{|z-x| \leqq h} f(z) \left\{ \frac{3h^2 - |z-x|^2}{2h^3} - \frac{1}{|z-x|} \right\} dz \\ &= \int_{|y| \leqq h} f(x+y) \frac{3h^2|y| - |y|^3 - 2h^3}{2h^3|y|}\,dy. \end{aligned}$$

Mit der Funktion

$$\varphi(r) = \frac{2h^3 + r^3 - 3h^2 r}{2h^3 r}, \qquad 0 < r \leqq h \tag{4}$$

erhält man somit, wenn $|y| = r$ gesetzt wird,

$$(5) \qquad \Delta_h u(x) = -f(x) \int\limits_{|y| \leqq h} \varphi(r)\, dy - \int\limits_{|y| \leqq h} \{f(x+y) - f(x)\}\, \varphi(r)\, dy.$$

Für die Funktion $\varphi(r)$ ist

$$(6) \qquad \int\limits_{|y| \leqq h} \varphi(r)\, dy = 4\pi \int\limits_0^h \varphi(r)\, r^2\, dr = 4\pi \frac{h^2}{10}.$$

Die Behauptung des Satzes wird also bewiesen sein, wenn man zeigt, daß das $\frac{10}{h^2}$-fache des zweiten Integrals in (5) bei $h \to 0$ gegen Null konvergiert. Für eine L-integrierbare Funktion $f(x)$ sind fast alle Punkte x von G ihre Lebesgueschen Punkte: Es gilt für diese x

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^3} \int\limits_{|y| \leqq h} |f(x+y) - f(x)|\, dy = 0.$$

Die Behauptung soll für ein solches x bewiesen werden.

Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und passendes $\delta > 0$ ist

$$\frac{1}{h^3} \int\limits_{|y| \leqq h} |f(x+y) - f(x)|\, dy < \varepsilon, \qquad 0 < h \leqq \delta.$$

Die Funktion $\varphi(r)$ ist offenbar für $0 < r < h$ positiv und monoton abnehmend. Nach dem Hilfssatz und (6) ist deshalb für $0 < h \leqq \delta$

$$\frac{10}{h^2} \int\limits_{|y| \leqq h} |f(x+y) - f(x)|\, \varphi(r)\, dy \leqq \frac{10}{h^2}\, 64\, \varepsilon \int\limits_0^h \varphi(r)\, r^2\, dr = 256\, \pi\, \varepsilon,$$

womit der Satz bewiesen ist. Auf ähnliche Weise kann man eine dreidimensionale Verallgemeinerung eines Satzes von D. Faddeeff[3]) ableiten. Dieser Satz behandelt die Darstellbarkeit einer Funktion in ihren Lebesgueschen Punkten durch ein singuläres Integral.

Nur der Einfachheit halber haben wir uns auf den Fall $n = 3$ beschränkt; auch für ein Potential im n-dimensionalen Raum R_n $(n \geqq 2)$

$$u(x) = \int\limits_G f(y)\, \gamma(|y - x|)\, dy$$

mit $\gamma(r) = 1 : (n-2)\, r^{n-2}$ für $n > 2$ bzw. $\gamma(r) = \log \frac{1}{r}$ für $n = 2$ gilt die entsprechende Formel

$$\Delta^* u(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(n+2)}{h^2}\, \Delta_h u(x) = -\omega_n f(x),$$

wobei ω_n die Oberfläche der Einheitskugel in R_n bedeutet.

[3]) D. Faddeeff, Rec. math. Moscou, (2) 1 (1936), S. 351—368, I. Natanson, ebenda, S. 369—376.

(Eingegangen am 28. März 1945.)

Zur isoperimetrischen Ungleichung in Räumen konstanter Krümmung[1]).

Von

A. Dinghas in Berlin.

1. Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch gemacht, für RIEMANNsche Räume konstanter Krümmung, insbesondere für den sphärischen und hyperbolischen Raum, das mehrdimensionale Analogon der isoperimetrischen Ungleichung

$$F(4\pi - KF) \leq L^2 \tag{1.1}$$

aufzustellen. Hier bedeuten F, L den Flächeninhalt bzw. die Länge einer auf einer Ebene konstanter Krümmung geschlossenen Kurve C.

Für höhere Dimensionen als 2 gab es bis jetzt kein Analogon zu (1.1). Vielmehr weiß man nur durch E. SCHMIDT, daß, falls V das Volumen des betreffenden Körpers $\mathfrak{K}$ und V_0^* das Volumen der oberflächengleichen Kugel $\mathfrak{K}^*$ bedeutet, die Ungleichung

$$V \leq V_0^* \tag{1.2}$$

gilt, und daß das Gleichheitszeichen nur für die Kugel eintritt. Für den sphärischen Raum muß man allerdings noch die Einschränkung machen, daß $\mathfrak{K}$ der kleinere der beiden Teile $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ des betreffenden sphärischen Raumes ist, in den die Oberfläche des Körpers diesen Raum zerlegt. Die Ungleichung (1.2) kann man bekanntlich[2]) auch in der Form

$$V \leq E_n \int_0^Q x^{n-1}(1 - Kx^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx \qquad \left(Q = \sqrt[n-1]{\frac{O}{E_n}}\right) \tag{1.3}$$

schreiben, wenn man mit O die Oberfläche von $\mathfrak{K}$ bezeichnet und mit E_n die Oberfläche der n-dimensionalen euklidischen Kugel.

---

[1]) Die wichtigsten Ungleichungen dieser Note wurden Dezember 1943 Herrn Prof. E. SCHMIDT und Oktober 1944 Herrn Prof. PERRON mitgeteilt. Eine kürzere, den wesentlichen Teil dieser Arbeit enthaltende Fassung wurde Anfang Januar 1945 der Mathem. Zeitschrift eingereicht. Die Arbeit wurde unter sehr schwierigen äußeren Verhältnissen vollendet.

[2]) Vgl. DINGHAS, Math. Zeitschr. 47 (1942), S. 677—737 und Math. Annalen 118 (1943), S. 636—686. Dort findet sich eine genaue Aufzählung der SCHMIDTschen Arbeiten. (Vgl. auch Fußnote 10 und 13.)

Es wird sich nun zeigen, daß eine uneingeschränkte, einfache Übertragung von (1.1) auf höhere Dimensionen nicht möglich ist. Eine einfache Form (ähnlich wie (1.2)) erhält man nur für $K > 0$, also für den sphärischen und den elliptischen Raum, und die Dimensionszahl von der Form $n = 2k$ oder für $K < 0$ (den hyperbolischen Raum) und die Dimensionszahl von der Form $n = 2(2\lambda + 1)$, also $n \equiv 2 \pmod 4$. Für $K < 0$ und $n \equiv 0 \pmod 4$ gilt eine kompliziertere Ungleichung als für $n \equiv 2 \pmod 4$. Für $K > 0$ und $n \equiv 1 \pmod 2$ und für $K < 0$ und $n \equiv 1, 3 \pmod 4$ gelten keine einfachen Ungleichungen, insbesondere keine solche, die Polynome enthalten.

Der letzte Teil dieser Note beschäftigt sich mit Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichung (1.2) mit Hilfe der sogenannten „linearen" isoperimetrischen Ungleichung, die am gehörigen Ort ausführlich angegeben wird. Es ergeben sich dann einige Ungleichungen, die für den euklidischen dreidimensionalen Fall zuerst von Bonnesen aufgestellt wurden. Hier werden diese Ungleichungen einheitlich ohne Rücksicht auf Krümmung und Dimensionszahl bewiesen.

2. Ungleichungen.

Zuerst kann man sich für $K > 0$ von der Einschränkung des „kleineren" Teiles befreien, indem man $K = \frac{1}{R^2}$ setzt und die Funktion

$$\Phi_n(x) = x\left(E_{n+1} - \frac{x}{R^n}\right) \tag{2.1}$$

betrachtet, wo E_{n+1} die Oberfläche der $(n+1)$-dimensionalen Einheitskugel bedeutet. Da diese Funktion im Intervall

$$0 \leq x \leq \tfrac{1}{2} E_{n+1} R^n \tag{2.2}$$

eine wachsende monotone Funktion ist und man für V und V^* die Voraussetzung[3]) (2.2) machen kann, so kann man an Stelle von (1.2) noch die Ungleichung

$$\Phi_n(V) \leq \Phi_n(V_0^*) \tag{2.3}$$

setzen, die (da Φ_n unverändert bleibt, wenn man x durch $E_{n+1} - \frac{x}{R^n}$ ersetzt) auch dann gilt, wenn V das Volumen irgendeines der beiden Teile $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ bedeutet. Für $K < 0$ gilt dieselbe Ungleichung (2.3) mit dem Unterschied, daß hier $\Phi_n(x)$ durch die für $x > 0$ konvexe Funktion

$$\Phi_n(x) = \Phi_n^*(x) = x\left(E_{n+1} + \frac{x}{R^n}\right) \qquad \left(K = -\frac{1}{R^2}\right) \tag{2.4}$$

definiert wird.

---

[3]) Vgl. E. Schmidt, Die isoperimetrischen Ungleichungen auf der gewöhnlichen Kugel und für Rotationskörper im n-dimensionalen sphärischen Raum. Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 743—794. Dort wird gezeigt, daß man für $K > 0$ ohne weiteres $O \leq E_n R^{n-1}$ annehmen kann. Infolgedessen liegen sowohl V wie auch V_0^* in (2.2).

Wegen (1.3) kann man auch schreiben:

$$\Phi_n(V) \leq \Phi_n\{E_n \int_0^Q x^{n-1}(1-Kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\}, \tag{2.5}$$

wobei man, je nach dem Vorzeichen von K, als Definition von Φ_n (2.1) oder (2.4) nehmen muß.

Es zeigt sich nun, daß sich in den vorhin erwähnten Fällen die rechte Seite dieser Ungleichung durch ein einfaches Polynom in Q ausdrücken läßt.

Und zwar gilt: für $K>0$, $n = 2k$

$$\Phi_n(V) \leq \frac{E_n E_{n+1}}{n} Q^n P_{n-2}\left(\frac{Q^2}{R^2}\right) \tag{2.6}$$

und für $K<0$, $n = 2(2\lambda+1) = 2k$

$$\Phi_n^*(V) \leq \frac{E_n E_{n+1}}{n} Q^n P_{n-2}\left(-\frac{Q^2}{R^2}\right) \tag{2.7}$$

mit

$$P_{n-2}(x) = 1+\frac{1}{2}\frac{nx}{n+2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{nx^2}{n+4}+\cdots+\frac{1.3\ldots(n-3)}{2.4\ldots(n-2)}\frac{nx^{\frac{n-2}{2}}}{2n-2}\text{ [4]}.$$

Setzt man, wie üblich, $nW_n = E_n$, $(n+1)W_{n+1} = E_{n+1}$, also W_n, W_{n+1} für die Volumina der n- (bzw. $n+1$)-dimensionalen Einheitskugel, und bezeichnet man mit $\Psi_n(x)$ die Funktion

$$\frac{x}{W_n}\left(1-\frac{x}{E_{n+1}R^n}\right)$$

oder die Funktion

$$\frac{x}{W_n}\left(1+\frac{x}{E_{n+1}R^n}\right),$$

je nachdem $K>0$ oder $K<0$ ist, so erhalten wir daraus mit Rücksicht auf die Bedeutung von Q die Ungleichung

$$\Psi_n^{n-1}(V) \leq \left(\frac{O}{E_n}\right)^n P_{n-2}^{n-1}\left(\pm\frac{Q^2}{R^2}\right), \tag{2.8}$$

und zwar $+$ für $K>0$ und $-$ für $K<0$.

Diese Ungleichung geht für $n=2$ in (1.1) über und für $K\to 0$, also $R\to\infty$, in die klassische isoperimetrische Ungleichung

$$\left(\frac{V}{W_n}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{O}{E_n}\right)^n.$$

Für $K<0$ und $n=2k$ kann die rechte Seite von (2.5) nicht allein durch ein Polynom in Q ersetzt werden.

---

[4]) Dieses Polynom ist nichts anderes als ein Abschnitt der Entwicklung von $x^{-n}\int_0^x t^{n-1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt$ nach Potenzen von x.

Genauer gilt

$$(2.9) \qquad \Psi_n(V) \leqq 2n \int_0^Q x^{n-1}(1-Kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx - Q^n P_{n-2}\left(-\frac{Q^2}{R^2}\right).$$

In allen übrigen Fällen ist die rechte Seite der isoperimetrischen Ungleichung eine wohlbestimmte transzendente Funktion von Q, die später genau angegeben werden soll.

3. Beweise.

Zum einfacheren Beweis der vorstehenden Formeln betrachten wir die Funktion (zuerst für $K > 0$)

$$\varphi_n(x) = \frac{\Phi_n(x)}{R^n} = \frac{x}{R^n}\left(E_{n+1} - \frac{x}{R^n}\right)$$

und beachten, daß allgemein [5]) die Formeln gelten:

$$\int_0^x x^{n-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= C\left\{1-\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\cdots+\frac{1.3\ldots(2k-3)}{2.4\ldots(2k-2)}x^{2k-2}\right)\sqrt{1-x^2}\right\}$$
$$= C\left\{1-\frac{[\varphi(x)]}{\varphi(x)}\right\}$$

für $n = 2k$ und

$$\int_0^x x^{n-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2C}{\pi}\left\{\arcsin x-\left(x+\frac{2}{3}x^3+\cdots+\frac{2.4\ldots(2k-2)}{3.5\ldots(2k-1)}x^{2k-1}\right)\sqrt{1-x^2}\right\}$$
$$= C\varrho(x)\left\{1-\frac{[\psi(x)]}{\psi(x)}\right\}$$

für $n = 2k+1$.

Dabei ist in beiden Fällen

$$C = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

so daß wegen bekannter Zusammenhänge $2E_nC = E_{n+1}$ wird [6]). Über die Abkürzungen sei noch gesagt, daß $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist und $[\varphi(x)]$ der

---

[5]) Vgl. z. B. Hermite, Cours d'Analyse, Paris 1873, S. 301.

[6]) Allgemein ist $E_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

k-te Abschnitt der Taylorentwicklung davon. Ferner ist $\psi(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ und $[\psi(x)]$ der k-te Abschnitt der Taylorentwicklung davon. Schließlich ist $\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin x$.

Beachtet man alle diese Zusammenhänge, so erhält man (zuerst für $K > 0$)

$$E_n \int_0^Q x^{n-1}(1-Kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{R^n E_{n+1}}{2}\left\{1 - \frac{\left[\varphi\left(\frac{Q}{R}\right)\right]}{\varphi\left(\frac{Q}{R}\right)}\right\} \qquad \left(K = \frac{1}{R^2}\right),$$

d. h. wenn man noch zur Abkürzung $Q = Ra$ setzt,

$$\varphi_n\left(E_n \int_0^Q x^{n-1}(1-Kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\right) = \frac{E_{n+1}^2}{4}\left(1 - \frac{[\varphi(a)]^2}{\varphi^2(a)}\right).$$

Die Auswertung des Ausdrucks

$$1 - \frac{[\varphi(a)]^2}{\varphi^2(a)} = 1 - (1-a^2)[\varphi(a)]^2$$

geschieht am elegantesten folgendermaßen:

Man setze zuerst

$$(1-a^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty A_\nu a^{2\nu}$$

und

$$[\varphi(a)] = S_k = S_k(a) = \sum_0^{k-1} A_\nu a^{2\nu}.$$

Dann ist, wie man leicht nachprüft:

$$\begin{aligned} S_k^2 = {} & 1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{2k-2} + (1 - 2A_0A_k)a^{2k} + \cdots \\ & \cdots + (1 - 2A_0A_{2k-2} - 2A_1A_{2k-3} - \cdots - 2A_{k-2}A_k)a^{4k-4}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit $(1-a^2)$, so findet man

$$\begin{aligned} (1-a^2)S_k^2 = {} & 1 - 2a^{2k}\{A_0A_k + (A_0A_{k+1} + A_1A_k - A_0A_k)a^2 + \cdots + \cdots \\ & \cdots + (A_0A_{2k-2} + A_1A_{2k-3} + \cdots + A_{k-2}A_k - A_0A_{2k-2} - \cdots - A_{k-2}A_k)a^{2k-2}\}. \end{aligned}$$

Hier ist zu beachten, daß in der letzten Klammer

$$2(A_0A_{2k-2} + \cdots + A_{k-2}A_k) = 1$$

ist. Die eingeklammerten Ausdrücke sind leicht auszuwerten.

Aus

$$A_n = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n}, \qquad A_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n+2)}$$

folgt nämlich allgemein:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2n+1}{2n+2}, \tag{3.2}$$

also zuerst

$$A_0A_{k+1} + A_1A_k - A_0A_k = A_k \cdot \frac{2k}{2k+2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Nun ist der Koeffizient R_ν $(\nu \geq 1)$ von $a^{2\nu}$ in der geschweiften Klammer gleich

$$(A_0 A_{k+\nu} + A_1 A_{k+\nu-1} + \cdots + A_\nu A_k) - (A_0 A_{k+\nu-1} + A_1 A_{k+\nu-2} + \cdots + A_{\nu-1} A_k)$$

und man bestätigt leicht, daß R_ν wegen des Baues der Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ gleich

$$(3.3) \qquad A_{k+\nu} - \frac{1}{2} A_{k+\nu-1} - \frac{1.1}{2.4} A_{k+\nu-2} - \cdots - \frac{1.1.3 \ldots (2\nu-3)}{2.4.6 \ldots 2\nu} A_k$$

ist oder noch gleich

$$A_0 A_{k+\nu} - \frac{1}{1} A_1 A_{k+\nu-1} - \frac{1}{3} A_2 A_{k+\nu-2} - \cdots - \frac{1}{2\nu-1} A_\nu A_k.$$

Wir behaupten nun: Es ist

$$(3.4) \qquad R_\nu = A_k \frac{1.3.5 \ldots (2\nu-1)}{2.4.6 \ldots 2\nu} \frac{2k}{2k+2\nu}.$$

Faßt man nämlich die beiden ersten Glieder von (3.3) zusammen, so erhält man mit Rücksicht auf (3.2)

$$R_\nu = \frac{1}{2} \frac{k+\nu-1}{k+\nu} A_{k+\nu-1} - \frac{1.1}{2.4} A_{k+\nu-2} - \cdots - \frac{1.1.3 \ldots (2\nu-3)}{2.4.6 \ldots 2\nu} A_k.$$

Eine zweite Reduktion ergibt dann

$$R_\nu = \frac{1.3}{2.4} \frac{k+\nu-2}{k+\nu} A_{k+\nu-2} - \frac{1.1.3}{2.4.6} A_{k+\nu-3} - \cdots - \frac{1.1.3 \ldots (2\nu-3)}{2.4.6 \ldots 2\nu} A_k$$

und man sieht leicht, daß man nach ν Schritten zu der einfachen Formel (3.4) kommt.

Danach ist also $1-(1-a^2)S_k^2$ gleich

$$2 A_k a^{2k} \left\{ 1 + \sum_1^{k-1} \frac{1.3 \ldots (2\nu-1)}{2.4 \ldots 2\nu} \frac{2k}{2k+2\nu} a^{2\nu} \right\}.$$

Nun ist noch leicht zu sehen, daß $A_k = \frac{1}{2kC}$ ist, also $A_k = \frac{2E_n}{n E_{n+1}}$. Berücksichtigt man diese Gleichung, so wird, wenn man noch bedenkt, daß $\Phi_n(x) = \varphi_n(x) R_n$ ist,

$$\Phi_n(V) \leq \frac{E_n E_{n+1}}{n} O^{\frac{n}{n-1}} \left\{ 1 + \sum_1^{k-1} \frac{1.3 \ldots 2\nu-1}{2.4 \ldots 2\nu} \frac{n}{n+2\nu} a^{2\nu} \right\}.$$

Daraus folgen aber trivialerweise sowohl (2.6) als auch (für $K>0$, $n = 2k$) (2.8), und zwar für beliebiges O.

Für $K<0$ und $n = 2(2\lambda+1)$ verlaufen die Rechnungen durchaus analog.

Hier geht

$$\int_0^Q x^{n-1} (1 - K x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx$$

durch die Transformation $ix = y$, $K' = -K$ in das Integral

$$\int_0^{iQ} y^{n-1}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

über und, da $\frac{n}{2}$ ungerade ist, wird

$$E_n \int_0^{Q} x^{n-1}(1-Kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{R^n E_{n+1}}{2}\left\{1-\frac{[\varphi(a)]}{\varphi(a)}\right\}.$$

Hier ist jedoch $a^2 = -\frac{Q^2}{R^2}$.

Aus diesen Gleichungen folgt aber, da $\Phi_n(x)$ für $K<0$ durch

$$\Phi_n(x) = x\left(E_{n+1}+\frac{x}{R^n}\right)$$

definiert ist und die Rechnungen formal analog zu dem Fall $K>0$ verlaufen, die Ungleichung (2.7) unmittelbar.

4. Der Fall $K<0$, $n = 4\lambda$ und $K>0$, $n = 2\lambda+1$.

Im Falle $n = 4\lambda$ und $K<0$ ist

$$E_n \int_0^{Q} x^{n-1}(1-Kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{R^n E_{n+1}}{2}\left\{1-\frac{[\varphi(a)]}{\varphi(a)}\right\} \tag{4.1}$$

mit

$$a^2 = -\frac{Q^2}{R^2}.$$

Hiermit wird nach einigen einfachen Rechnungen

$$\Phi_n\left\{E_n \int_0^{Q} x^{n-1}(1-Kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\right\} = R^n E_{n+1}^2\left\{\left(1-\frac{[\varphi(a)]}{\varphi(a)}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{[\varphi(a)]^2}{\varphi^2(a)}\right)\right\}.$$

Nun ist nach den früheren Rechnungen

$$E_n \int_0^{a} x^{n-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{E_{n+1}R^n}{2}\left(1-\frac{[\varphi(a)]}{\varphi(a)}\right)$$

und

$$1-\frac{[\varphi(a)]^2}{\varphi^2(a)} = \frac{4E_n}{nE_{n+1}}a^n P_{n-2}(-a^2),$$

es wird also mit Rücksicht auf (4.1)

$$\Phi_n(V) \leq \frac{E_n E_{n+1}}{n}\left\{2n\int_0^{Q} x^{n-1}(1-Kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx - Q^n P_{n-2}\left(-\frac{Q^2}{R^2}\right)\right\}$$

oder noch

$$\Psi_n(V) \leq 2n\int_0^{Q} x^{n-1}(1-Kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx - Q^n P_{n-2}\left(-\frac{Q^2}{R^2}\right).$$

Somit ist auch (2.9) bewiesen.

Der Fall $K>0$, $n = 2k+1$ erledigt sich auf Grund von

$$\int_0^x t^{n-1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt = C\varrho(x)\left\{1-\frac{[\psi(x)]}{\psi(x)}\right\}.$$

Zuerst wollen wir die rechte Seite dieser Formel umformen, indem wir allgemein

$$[\psi(x)] = x P^*_{n-3}(x^2)$$

schreiben, mit

$$P^*_{n-3}(x) = 1+\frac{2}{3}x+\cdots+\frac{2.4\ldots n-3}{3.5\ldots n-2}\cdot x^{\frac{n-3}{2}}$$

Da nun aus (2.5) die Ungleichung

$$\Phi_n(V)\leq\frac{E_{n+1}^2}{4}R^n\left\{1-\left(1-\varrho(a)\left\{1-\frac{[\psi(a)]}{\psi(a)}\right\}\right)^2\right\}\quad\left(a=\frac{Q}{R}\right)$$

folgt, so erhalten wir die für $Q\leqq R$ gültige Ungleichung

$$(4.2)\quad \Phi_n(V)\leq\frac{E_{n+1}^2}{4}R^n\left\{1-\left(1-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{Q}{R}+\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\frac{Q^2}{R^2}}\,\frac{Q}{R}\,P^*_{n-3}\left(\frac{Q^2}{R^2}\right)\right)\right\}.$$

5. Die Fälle $K<0$, $n = 4\lambda+1$ und $n = 4\lambda+3$.

Wir erledigen jetzt auch die Fälle $K<0$, $n\equiv 1,3 \pmod 4$. Diese sind insofern uninteressant, als sie zu ähnlichen Ausdrücken wie (4.2) führen, die von „transzendentem" Bau sind.

Zuerst gilt:

$$I = E_n\int_0^Q t^{n-1}(1-Kt^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt = E_nK^{-\frac{n}{2}}\int_0^a x^{n-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{E_{n+1}}{2}K^{-\frac{n}{2}}\varrho(a)\left\{1-\frac{[\psi(a)]}{\psi(a)}\right\}$$

mit $a = \sqrt{K}\,Q$.

Es sei zuerst $n = 4\lambda+3$. Dann ist wegen $K = -\frac{1}{R^2}$

$$I = -\frac{E_{n+1}}{2}R^n\frac{1}{i}\varrho(a)\left\{1-\frac{[\psi(a)]}{\psi(a)}\right\} = -\frac{E_{n+1}R^n}{2}\frac{1}{i}\varrho(a)\left\{1-\frac{\frac{1}{i}[\psi(a)]}{\frac{1}{i}\psi(a)}\right\},$$

es wird also

$$I = -\frac{E_{n+1}}{2}R^n\left\{\frac{2}{\pi}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{Q}{R}-\frac{2}{\pi}\frac{Q}{R}P^*_{n-3}\left(-\frac{Q^2}{R^2}\right)\sqrt{1+\frac{Q^2}{R^2}}\right\},$$

woraus in Verbindung mit der allgemeinen Ungleichung (2.5)

$$\Phi^*(V) \leq \frac{E_{n+1}}{4} R^n \left\{ \left(1 - \frac{2}{\pi} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{Q}{R} + \frac{2}{\pi} \frac{Q}{R} \sqrt{1+\frac{Q^2}{R^2}}\, P^*_{n-3}\left(-\frac{Q^2}{R^2}\right)\right)^2 - 1 \right\}$$

folgt.

Für $n = 4\lambda + 1$ ist

$$I = \frac{E_{n+1}}{2} R^n \left\{ \frac{2}{\pi} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{Q}{R} - \frac{2}{\pi} \frac{Q}{R} \sqrt{1+\frac{Q^2}{R^2}}\, P^*_{n-3}\left(-\frac{Q^2}{R^2}\right)\right\}$$

und es folgt leicht

$$\Phi^*_n(V) \leq \frac{E_{n+1}}{2} R^n \left\{ \left(1 + \frac{2}{\pi} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{Q}{R} - \frac{Q}{R} \sqrt{1+\frac{Q^2}{R^2}}\, P^*_{n-3}\left(-\frac{Q^2}{R^2}\right)\right)^2 - 1 \right\}.$$

Es braucht hier kaum wiederholt zu werden, daß auch diese letzten beiden Ungleichungen für $R \to \infty$ in die klassische isoperimetrische Ungleichung des euklidischen Raumes übergehen.

6. Verschärfungen. Die lineare isoperimetrische Ungleichung und das Abrundungstheorem von Schwarz-Schmidt.

Wir kommen jetzt zum letzten Teil unserer Arbeit, nämlich zum Beweis einiger Verschärfungen der vorhin angegebenen Ungleichungen mit Hilfe des Inhalts des maximalen Schnittes des betreffenden Körpers $\mathfrak{K}$, wie das schon im euklidischen dreidimensionalen Fall von Bonnesen [7]) durchgeführt wurde. Damit der Leser alles beisammen haben möge, wollen wir hier an einige bekannte Tatsachen betreffs der linearen isoperimetrischen Ungleichung kurz erinnern. Dabei knüpfe ich an einige frühere Arbeiten von mir an [8]), wo diese Ungleichungen (sogar in Gleichungen verschärft) einheitlich für alle Räume konstanter Krümmung bewiesen wurden.

Wir schicken zuerst folgende Definitionen und Tatsachen voraus: Im folgenden sollen $\psi(x, K)$, $\varphi(x, K)$, $\omega(x, K)$ (kurz $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $\omega(x)$) den Funktionen $\frac{\sin \sqrt{K}x}{\sqrt{K}}$, $\cos \sqrt{K}x$, $\frac{\operatorname{tg} \sqrt{K}x}{\sqrt{K}}$ entsprechen. Es zeigt sich dann, daß die Metrik der Riemannschen Räume konstanter Krümmung K die Fundamentalmetrik

$$(6.1) \quad ds^2 = d\vartheta_1^2 + \varphi^2(\vartheta_1)\, d\vartheta_2^2 + \cdots + \varphi^2(\vartheta_1)\, \varphi^2(\vartheta_2) \cdots \varphi^2(\vartheta_{n-1})\, d\vartheta_n^2$$

besitzt. Ist $K > 0$, so liegt der sphärische Raum vor. Der „Fundamental-

---

[7]) Vgl. z. B. Bonnesen, Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes, Paris, Gauthier-Villars, 1929.

[8]) Es kommen dabei die zwei schon in Fußnote 2 erwähnten Arbeiten in Frage: 1. Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung; 2. Über das isoperimetrische Problem in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung.

bereich" besteht dann aus dem Intervall

$$(6.2)\quad -\frac{\pi}{2\sqrt{K}} \leq \vartheta_i \leq \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad -\frac{\pi}{\sqrt{K}} < \vartheta_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}\ ^{9}).$$

Für $K<0$ liegt der hyperbolische Raum vor, der als Fundamentalbereich bekanntlich den ganzen euklidischen ϑ-Raum besitzt. Schließlich geht (6.1) für $K \to 0$ in die euklidische Metrik des ϑ-Raumes über.

Das lineare isoperimetrische Problem kann nun einheitlich folgendermaßen gestellt werden[10]):

Es soll unter allen Körpern $\mathfrak{K}$, *die im Fundamentalbereich von* (6.1) *liegen und deren „Projektion" die* $(n-1)$*-dimensionale Kugel*

$$(6.3)\quad \prod_1^{n-1} \varphi^2(\vartheta_\nu) \geq \varphi^2(a), \quad \vartheta_n = 0$$

vollständig ausfüllt, derjenige bestimmt werden, der unter vorgegebener Oberfläche $O \geq 2\,O^*$ *das Maximum des Volumens aufweist.* Dabei ist O^* die Oberfläche der $(n-1)$-dimensionalen Kugel vom Radius a. Ferner besteht die „Projektion" aus allen Punkten $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, 0)$, wenn der Punkt $P(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ den Körper durchläuft.

Eins der schärfsten Resultate, das man nun erhalten kann, wird durch die Gleichung

$$(6.4)\quad (n-1)\,V = \omega(a)\,O - E_n \int_0^a \frac{\psi^{n-1}(x)}{\varphi^2(x)}\,dx - 2\,\omega(a)\,R_n(\mathfrak{K})$$

gegeben[11]). Dabei bedeutet E_n die Oberfläche der n-dimensionalen euklidischen Einheitskugel und R_n ein nicht negatives Glied, das dann und nur dann verschwindet, wenn $\mathfrak{K}$ identisch mit folgendem Körper ist: Man betrachte die beiden Halbkugeln O_1^*, O_2^*, in die die Kugel mit Radius a um den Nullpunkt durch die Hyperebene $\vartheta_n = 0$ zerlegt wird. Zieht man dann diese ähnlich wie bei einem Teleskop auseinander,

---

[9]) Im elliptischen Raum genügt ϑ_n ebenfalls der Ungleichung

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{k}} < \vartheta_n \leq \frac{\pi}{2\sqrt{K}}.$$

Das isoperimetrische Problem ist dabei gleichbedeutend mit dem isoperimetrischen Problem auf einer Halbkugel. Diese Voraussetzung, die, wie E. Schmidt gezeigt hat, keine Einschränkung der Allgemeinheit ist, wird im folgenden gemacht.

[10]) Zuerst gestellt und gelöst für Rotationskörper von E. Schmidt. Vgl. 1. Über das isoperimetrische Problem im Raum von n-Dimensionen.. Math. Zeitschr. 44 (1939), S. 689—788. 2. Über die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung I. Ebenda 46 (1940), S. 204—230, sowie die in der Fußnote 3) zitierte Arbeit.

[11]) In dieser einheitlichen Form und unter weniger einschränkenden Voraussetzungen zuerst von Dinghas bewiesen. (Vgl. Fußnote 2.)

so entsteht ein Körper $\mathfrak{K}^*$ von Kugel-Zylinder Typus [12]), der dann der besagte Körper ist. Für diesen und nur diesen ist $R_n(\mathfrak{K}) = 0$.

Die Übertragung von (6.4) auf einen beliebigen regulären Körper können wir nun mit E. Schmidt [13]) auf folgende Weise durchführen:

Es sei $\mathfrak{K}$ der gegebene Körper. Wir betrachten die Schnitte $\mathfrak{K}_\vartheta$ von $\mathfrak{K}$ mit einer Schar von Abstandsflächen, z. B. der Schar $\vartheta_1 = \vartheta$ und ersetzen jedesmal $\mathfrak{K}_\vartheta$ durch eine $(n-1)$-dimensionale Vollkugel, deren Mittelpunkt im Schnittpunkt der betreffenden Fläche mit einer zu allen Flächen der Schar senkrechten Geraden liegt. Auf diese Weise entsteht aus $\mathfrak{K}$ ein Rotationskörper $\overline{\mathfrak{K}}$ im nichteuklidischen Sinne, der offenbar dasselbe Volumen besitzt. Das ist das Symmetrisierungsverfahren von Schwarz-Schmidt. Das Wichtigste dabei ist die Tatsache, daß die Oberfläche $\overline{O}$ des Rotationskörpers $\overline{\mathfrak{K}}$ im allgemeinen kleiner als die Oberfläche O von $\mathfrak{K}$ ist, und daß sie gleich ist, wenn $\mathfrak{K}$ schon ein Rotationskörper um eine zu der Schar senkrechte Gerade ist.

Mit Rücksicht darauf erhalten wir dann die Ungleichung

$$(6.5) \qquad (n-1)\,V \leq O\,\omega(a) - E_n \int_0^a \frac{\psi^{n-1}(x)}{\varphi^2(x)}\,dx - 2\,\omega(a)\,R_n(\overline{\mathfrak{K}}),$$

wobei a folgende Bedeutung hat: Es sei $\mathfrak{S}_{\vartheta_0}$ derjenige Schnitt von $\mathfrak{K}$ mit der Ebene $\vartheta_n = \vartheta_0$, der den maximalen Inhalt besitzt. Dann ist a der Radius der mit $\mathfrak{S}_{\vartheta_0}$ volumengleichen Kugel.

7. Verschärfungen.

Unter Verschärfungen von (1.2) und den übrigen Ungleichungen werden wir im folgenden Ungleichungen verstehen, in denen nur leicht definierbare geometrische Größen auftreten. Es zeigt sich dann, daß (6.5) zur Gewinnung interessanter Ungleichungen führt, die für den dreidimensionalen euklidischen Fall mit einer zuerst von Bonnesen [14]) angegebenen Verschärfung übereinstimmen.

Wir gehen von der Ungleichung

$$(7.1) \qquad (n-1)\,V \leq O\,\omega(a) - E_n \int_0^a \frac{\psi^{n-1}\,dx}{\varphi^2}$$

aus und definieren a_0 durch die Gleichung (für $K>0$ soll $O < E_n R^{n-1}$ gelten)

$$\psi^{n-1}(a_0) = \psi_0^{n-1} = \frac{O}{E_n}.$$

---

[12]) Dinghas, Fußnote 2).

[13]) E. Schmidt, Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionszahl. Math. Zeitschr. **49** (1943), S. 1—109.

[14]) Bonnesen, loc. cit., S. 135.

Es folgt dann nach einigen leichten Umformungen:

$$V-V_0^* = V-E_n\int_0^{a_0}\psi^{n-1}\,dx \leq E_n\left\{\frac{\psi_0^{n-1}\,\omega-\psi^{n-1}\,\omega}{n-1}+\int_{a_0}^{a}\psi^{n-1}\,dx\right\}.$$

Mit $\psi = \psi(a) = q$, $\psi_0 = \psi(a_0) = q_0$ wird nun:

$$V-V_0^* \leq -E_n\left\{\frac{q^{n-1}q-q_0^{n-1}q}{n-1}\,\frac{1}{\sqrt{1-Kq^2}}+\int_{\beta}^{q_0}\frac{x^{n-1}\,dr}{\sqrt{1-Kx^2}}\right\}$$

oder durch eine weitere Substitution $\sqrt{K}\,q = \mu$, $\sqrt{K}\,q_0 = \mu_0$

$$V-V_0^* \leq -E_n K^{-\frac{n}{2}}\left\{\frac{(\mu^{n-1}-\mu_0^{n-1})}{n-1}\,\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}-\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right\}.$$

Nun setzen wir

$$\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} = \sum_0^\infty a_\nu\,\mu^{2\nu} \qquad \left(a_\nu = \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\right)$$

und entwickeln den Integranden in eine Potenzreihe. Wir erhalten dann leicht:

$$V-V_0^* \leq -E_n K^{-\frac{n}{2}}\left\{\sum_0^\infty \frac{a_k X_k}{(n-1)(n+2k)}\right\} \tag{7.2}$$

mit

$$X_k = X(\mu) = (2k+1)\mu^{n+2k}-(n+2k)\mu^{2k+1}\mu_0^{n-1}+(n-1)\mu_0^{n+2k}.$$

Es bezeichne nun $\psi(\mu,\mu_0)$ die Funktion

$$\psi = K^{-\frac{n}{2}}\sum_0^\infty \frac{a_k X_k}{(n+2k)}.$$

Bilden wir ψ', so zeigt eine leichte Rechnung, daß ψ' gleich

$$\frac{\mu^{n-1}-\mu_0^{n-1}}{(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ist. Es wird also

$$\psi(\mu,\mu_0) = K^{-\frac{n}{2}}\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{(\mu^{n-1}-\mu_0^{n-1})}{(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\mu$$

oder, wenn man zu q bzw. q_0 übergeht und die entsprechende Funktion wieder mit $\psi(q,q_0)$ bezeichnet,

$$\psi(q,q_0) = \int_{q_0}^{q}(x-q_0)\,\frac{\{x^{n-2}+x^{n-3}q_0+\cdots+q_0^{n-1}\}}{(1-Kx^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx. \tag{7.3}$$

Diese Funktion ist wesentlich positiv, und zwar für jedes q. Mit Rücksicht darauf erhält man aus (7.2)

$$V-V_0^* \leq -\frac{E_n}{n-1}\,\psi(q,q_0). \tag{7.4}$$

8. Der Fall $K \geq 0$.

Für den Fall $K \geq 0$ kann man aus (7.3) Verschärfungen angeben, die nur Größen enthalten, die einer geometrischen Deutung fähig sind.

Dafür gehen wir von (7.2) aus und bemerken, daß

$$X_k = (\mu-\mu_0)^2 [(2k+1)\mu^{2k}\{1 . \mu^{n-2}+2 . \mu^{n-3}\mu_0+\cdots+(n-1) . \mu_0^{n-2}\}+ \\ +(n-1)\mu_0^{n-1}\{1 . \mu_0^{2k-1}+2 . \mu_0^{2k-2}+\cdots+2k . \mu^{2k-1}\}]$$

ist und daher für jedes k

$$X_k \geq (n-1)(\mu-\mu_0)^2 \mu_0^{n+2k-2}. \tag{8.1}$$

Dieses Resultat in Verbindung mit (7.2) gibt

$$V-V_0^* \leq -E_n K^{-\frac{n}{2}} (\mu-\mu_0)^2 \sum_0^\infty \frac{a_k \mu_0^{n+2k-2}}{n+2k}. \tag{8.2}$$

Geht man jetzt zu der Integralform über, so erhält man

$$V-V_0^* \leqq -\frac{(q-q_0)^2}{q_0^2} V_0^* \tag{8.3}$$

oder

$$V \leq V_0^* - \left(1-\frac{\psi(a)}{\psi(a_0)}\right)^2 V_0^*. \tag{8.4}$$

Dieses ist die beabsichtigte Verschärfung. Sie gilt selbstverständlich nur im sphärischen oder im euklidischen Raum. Für den hyperbolischen Raum scheint die Aufstellung einer solchen Ungleichung schwer zu sein.

Für den euklidischen n-dimensionalen Raum kann man noch die schärfere Ungleichung

$$V-V_0^* \leq -\frac{E_n}{n}(q-q_0)^2 \frac{(1 . q^{n-2}+2 q q_0^{n-3}+\cdots+(n-1) q_0^{n-1})}{n-1}, \tag{8.4}$$

aufstellen, die aus (7.4) für $K \to 0$ hervorgeht und die für $n = 3$ inhaltlich mit der bereits zitierten Verschärfung von Bonnesen übereinstimmt.

(Eingegangen am 10. Januar 1945 und 17. Juni 1946.)

Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen.

Von

H. Wittich in Göttingen.

O. TEICHMÜLLER bewies in seiner Habilitationsschrift[1]) den Satz: Ist die punktierte Ebene $z \neq \infty$ quasikonform auf die punktierte Ebene $w \neq \infty$ abgebildet, gilt für den Dilatationsquotienten $D_{z|w} \leqq C(|z|) = C(r)$ und ist $\int^{\infty} (C(r)-1)\frac{dr}{r}$ konvergent, dann gibt es eine Konstante $a > 0$ mit $|w| = a|z|(1+\varepsilon(|z|))$, $\lim_{|z|\to\infty} \varepsilon(z) = 0$. Wie O. TEICHMÜLLER angibt, haben wir vergebens versucht, diesen Satz nach der AHLFORSSchen Methode der Differentialungleichung[2]) zu beweisen. TEICHMÜLLER erbrachte dann den Beweis mit Hilfe des von ihm aufgestellten Modulsatzes. Im folgenden soll gezeigt werden, daß durch passende Übertragung der AHLFORSSchen Methode auf den vorliegenden Fall ein Beweis des Satzes gelingt.

Im ersten Abschnitt werden einige bekannte Eigenschaften der quasikonformen Abbildungen zusammengestellt. Der zweite Abschnitt bringt den Beweis des Satzes. Die Anwendung des Satzes auf eine früher behandelte Aufgabe[3]) aus der Wertverteilungslehre wird im letzten Abschnitt kurz angedeutet.

1. Ein Gebiet G_z der $z = x+iy$-Ebene werde durch $w(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ umkehrbar eindeutig und stetig differenzierbar in ein Gebiet G_w der w-Ebene abgebildet. Die Fundamentalgrößen E, F, G sind also in jedem gebietsinneren Punkt stetig und es gilt dort $\sqrt{EG-F^2} \neq 0$. Der Ausdruck $\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} = \frac{du+idv}{dx+idy}$ ist richtungsabhängig. Man zeigt die Existenz zweier zueinander orthogonaler Richtungen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$, für welche $m = \left|\frac{dw}{dz}\right|_{\mathfrak{e}_1} \leqq \left|\frac{dw}{dz}\right| \leqq \left|\frac{dw}{dz}\right|_{\mathfrak{e}_2} = M$ gilt. Durch $w = w(z)$ geht ein infinitesimaler Kreis um z_0 über in eine

[1]) TEICHMÜLLER, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen. Deutsche Math. 3 (1938).

[2]) AHLFORS, L.: Über eine in der neueren Wertverteilungslehre betrachtete Klasse transzendenter Funktionen. Acta Math. 58 (1932).

[3]) WITTICH, H.: Über die Wachstumsordnung einer ganzen transzendenten Funktion. Math. Zeitschr. Bd. 51.

infinitesimale Ellipse um w_0 mit dem Achsenverhältnis

$$D_{z|w} = \frac{\operatorname{Max}\left|\frac{dw}{dz}\right|}{\operatorname{Min}\left|\frac{dw}{dz}\right|} = \frac{M}{m}.$$

Für die Größe $D_{z|w}$ schlugen wir die Bezeichnung „Dilatationsquotient" vor. Man findet für $D_{z|w}$ den Ausdruck

$$1 \leqq D_{z|w} = |K| + \sqrt{K^2 - 1}, \quad K = \frac{1}{2}\frac{E+G}{\sqrt{EG-F^2}}. \tag{1}$$

Bei konformen Abbildungen gilt $D_{z|w} = 1$ und umgekehrt folgt aus $D_{z|w} = 1$, daß $z \longleftrightarrow w$ direkt oder indirekt konform ist. Bildet man $z = z(w)$, so gilt für den zugehörigen Dilatationsquotienten

$$D_{w|z} = D_{z|w}. \tag{2}$$

Bei konformen Abbildungen bleibt der Dilatationsquotient ungeändert. Die für konforme Abbildungen gültige Beziehung $\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = \frac{\boxed{dw}}{\boxed{dz}}$ ist bei den betrachteten differentialgeometrischen Abbildungen zu ersetzen durch

$$\frac{1}{D_{z|w}}\frac{\boxed{dw}}{\boxed{dz}} \leqq \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \leqq D_{z|w}\frac{\boxed{dw}}{\boxed{dz}}. \tag{3}$$

Dabei bedeuten $\boxed{dz}$ und $\boxed{dw}$ entsprechende Flächenelemente in der z-, w-Ebene. Man spricht von einer quasikonformen Abbildung, wenn für die differentialgeometrische Abbildung der Gebiete G_z und G_w aufeinander der Dilatationsquotient selber oder geeignete Mittelwerte desselben in einem der beiden Gebiete, also entweder in G_z oder in G_w, nach oben abgeschätzt sind.

Bei der vorliegenden Aufgabe liegt eine differentialgeometrische Abbildung des Gebietes $|z| < \infty$ in das Gebiet $|w| < \infty$ vor. Durch die Forderung $\iint\limits_{|z| \geqq r_0} (D_{z|w} - 1)\boxed{d \log z} = \int\limits_{r_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} (D_{z|w} - 1)\frac{dr}{r}\,d\varphi < \infty$ wird ein Mittelwert von $D_{z|w}$ in der z-Ebene nach oben abgeschätzt. Diese Bedingung, die für die Anwendungen manchmal geeigneter ist als die oben angegebene, ist sicher erfüllt, wenn $\int^{\infty} (C(r) - 1)\frac{dr}{r} < \infty$ gilt. Der zu beweisende Satz lautet dann

Satz. Ist die punktierte z-Ebene $z \neq \infty$ quasikonform auf die punktierte w-Ebene $w \neq \infty$ abgebildet und gilt

$$\iint\limits_{|z| \geqq r_0} (D_{z|w} - 1)\boxed{d \log z} < \infty, \tag{4}$$

dann gibt es eine Konstante $0 < a < \infty$ mit $|w| = a|z|(1+\varepsilon(|z|))$, $\lim_{|z|\to\infty} \varepsilon(|z|) = 0$[4]).

Da bei konformen Abbildungen $D_{z|w} = 1$ gilt, kann man $D_{z|w} - 1$ als ein Maß für die Abweichung der quasikonformen von der konformen Abbildung ansehen. (4) besagt also, daß die durch Integration über die Abweichung von der Konformität gebildete Funktion $h(r) = \iint_{|z| \geqq r} (D_{z|w} - 1) \boxed{d \log z}$ für $r \to \infty$ monoton gegen Null geht. Aus (4) ergibt sich sofort eine Aussage über das Maß der r-Werte, $r \geqq r_0$, für welche der Mittelwert $m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (D_{z|w} - 1)\, d\varphi \geqq$ einer gegebenen Zahl $q > 0$ ist. Sei Δ die r-Menge, für die $q \leqq m(r)$ richtig ist. Dann folgt durch Integration nach $\log r$ über Δ

$$q \int_\Delta \frac{dr}{r} \leqq \int_\Delta m(r) \frac{dr}{r} \leqq \int_{r_0}^{\infty} m(r) \frac{dr}{r} = \frac{h(r_0)}{2\pi} \quad \text{oder}$$

$$\int_\Delta \frac{dr}{r} \leqq \frac{h(r_0)}{2q\pi}; \tag{5}$$

das logarithmische Maß von Δ ist nicht größer als die in (5) angegebene Schranke.

2. Es sei $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\Theta}$. Dem Kreis $|w| = \varrho$ entspricht in der z-Ebene eine den Nullpunkt umschlingende streckbare Kurve Γ_ϱ. Nach L. Ahlfors[5]) setzen wir

$$r_1(\varrho) = \min_{\Gamma_\varrho} |z|, \quad r_2(\varrho) = \max_{\Gamma_\varrho} |z|, \quad \omega(\varrho) = \log \frac{r_2(\varrho)}{r_1(\varrho)}.$$

Da die logarithmische Länge von Γ_ϱ, d. i.

$$\int_{\Gamma_\varrho} |d \log z| = \int_0^{2\pi} \left| \frac{d \log z}{d \log w} \right| d\Theta \geqq \sqrt{4\pi^2 + \dot{\omega}^2(\varrho)}$$

ist, liefert die Schwarzsche Ungleichung

$$2\pi + \frac{\omega^2(\varrho)}{2\pi} \leqq \int_0^{2\pi} \left| \frac{d \log z}{d \log w} \right|^2 d\Theta \leqq \int_0^{2\pi} D_{w|z} \frac{\boxed{d \log z}}{\boxed{d \log w}}\, d\Theta.$$

---

[4]) Der Satz charakterisiert das Verhalten von $w = w(z)$ in einer Umgebung des unendlich fernen Punktes. Beim Beweis braucht man auch nur die Annahme, daß gewisse Umgebungen von $z = \infty$ und $w = \infty$ ($z = \infty$, $w = \infty$ selber ausgenommen) quasikonform aufeinander abgebildet sind.

[5]) Vgl. l. c. 2).

Durch logarithmische Integration nach ϱ über $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$ findet man

$$2\pi \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{1}{2\pi} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\omega^2(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho \leqq \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \int_0^{2\pi} \frac{d \log z}{d \log w} \frac{d\varrho}{\varrho}\, d\Theta$$

$$+ \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \int_0^{2\pi} (D_{w|z} - 1) \frac{d \log z}{d \log w} \frac{d\varrho}{\varrho}\, d\Theta.$$

Das erste Integral rechts ist offenbar

$$\leqq 2\pi \log \frac{r_2(\varrho_2)}{r_1(\varrho_1)} = 2\pi \left(\log \frac{r_1(\varrho_2)}{r_1(\varrho_1)} + \omega(\varrho_2) \right),$$

und für das zweite gilt wegen (2)

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \int_0^{2\pi} (D_{w|z} - 1) \frac{d \log z}{d \log w} \frac{d\varrho}{\varrho}\, d\Theta \leqq \int\int_{r_1(\varrho_1) \leqq |z| \leqq r_2(\varrho_2)} (D_{z|w} - 1)\, d \log z$$

$$\leqq \int\int_{|z| \geqq r_1(\varrho_1)} (D_{z|w} - 1)\, d \log z = h(r_1(\varrho_1)).$$

Damit erhalten wir

$$(6') \quad \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\omega^2(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho \leqq \log \frac{r_1(\varrho_2)}{r_1(\varrho_1)} + \omega(\varrho_2) + \frac{1}{2\pi} h(r_1(\varrho_1)).$$

In (6') stört das Glied $h(r_1(\varrho_1))$ mit der unbekannten Funktion $r_1 = r_1(\varrho)$ als Argument. Diese Schwierigkeit läßt sich so umgehen. Wir setzen mit L. Ahlfors $g(\varrho_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\omega^2(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho$. $\bar{\varrho} > 0$ sei eine beliebige, aber dann für die Rechnung feste Zahl. Ist nun $\varrho' > \bar{\varrho}$ eine Zahl, für welche $\omega(\varrho') \leqq g(\varrho') + 1$ richtig ist, so folgt mit $\varrho_1 = \bar{\varrho}$, $\varrho_2 = \varrho'$ aus (6') $\log \varrho' + \log \frac{r_1(\bar{\varrho})}{\bar{\varrho}} - 1 - h(r_1(\bar{\varrho})) < \log r_1(\varrho')$, d. h. $p_1 \varrho' \leqq r_1(\varrho')$.

Dabei hängt p_1 nur von $\bar{\varrho}$ und von $h(r_1(\bar{\varrho}))$ ab, ist also unabhängig von ϱ'. Ist für alle $\varrho' > \bar{\varrho}$ stets $\omega(\varrho') \leqq g(\varrho') + 1$ erfüllt, so gilt also für diese ϱ' $p_1 \varrho' \leqq r_1(\varrho')$. Falls diese Voraussetzung über $\omega(\varrho)$ nicht erfüllt ist, verfahren wir so. Es bezeichne Δ die Menge der ϱ-Werte, $\varrho > \bar{\varrho}$, für welche $\omega(\varrho) > g(\varrho) + 1$ gilt. Dann ist

$$\frac{dg}{d\varrho} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\omega^2(\varrho)}{\varrho} > \frac{1}{4\pi^2} \frac{(g(\varrho) + 1)^2}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \frac{d\varrho}{\varrho} < 4\pi^2 \frac{dg}{(g+1)^2}$$

für die ϱ-Menge Δ. Integration über Δ ergibt

$$\int_{\Delta} \frac{d\varrho}{\varrho} < 4\pi^2 \int_{\Delta} \frac{dg(\varrho)}{(g(\varrho) + 1)^2} \leqq 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{dg}{(g+1)^2} = 4\pi^2.$$

Es gibt also kein ϱ-Intervall J, das sich ins Unendliche erstreckt und in welchem $\omega(\varrho) > g(\varrho)+1$ gilt. Mithin gibt es beliebig große ϱ' mit $\omega(\varrho') \leqq g(\varrho')+1$ und für diese ϱ' gilt $p_1\varrho' \leqq r_1(\varrho')$. Nun sei ϱ eine beliebige Zahl $> \bar{\varrho}_0 = e^{4\pi^2}\bar{\varrho}$, für welche $p_1\varrho \leqq r_1(\varrho)$ nicht richtig ist. Dann gibt es, weil $\int_{\Delta} \frac{d\varrho}{\varrho} < 4\pi^2$ ist, auf dem Intervall $< e^{-4\pi^2}\cdot\varrho, \varrho)$ mindestens eine Zahl ϱ', die $\omega(\varrho') \leqq g(\varrho')+1$ erfüllt. Da $r_1(\varrho)$ mit ϱ monoton wächst und $\log\frac{\varrho}{\varrho'} < 4\pi^2$ ist, erhält man $r_1(\varrho) > r_1(\varrho') \geqq p_1\varrho' > e^{-4\pi^2}p_1\varrho = p\varrho$ für alle $\varrho > \bar{\varrho}_0$, wobei p nur von $\bar{\varrho}$ und von der Abbildungsfunktion $w = w(z)$ abhängt, nicht aber von ϱ. Mithin gilt für alle $\varrho > \bar{\varrho}_0$ $p\varrho < r_1(\varrho)$. Wählen wir nun in (6′) $\varrho_1 > \bar{\varrho}_0$, so folgt wegen $h(r_1(\varrho_1)) \leqq h(p\varrho_1)$ schließlich

$$(6)\qquad \log\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\frac{\omega^2(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho \leqq \log\frac{r_1(\varrho_2)}{r_1(\varrho_1)} + \omega(\varrho_2) + \frac{1}{2\pi}h(p\varrho_1),$$

gültig für alle Werte ϱ_1, ϱ_2, die $\bar{\varrho}_0 < \varrho_1 < \varrho_2$ genügen.

Das w-Bild von $|z| = r \geqq r_0 > r_1(\bar{\varrho}_0)$ ist eine geschlossene streckbare Kurve γ_r, die $w = 0$ umschlingt. Es gilt also $2\pi \leqq \int_{\gamma_r} |d\log w|$

$$= \int_0^{2\pi}\left|\frac{d\log w}{d\log z}\right| d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{D_{z|w}}}{\sqrt{D_{z|w}}}\left|\frac{d\log w}{d\log z}\right| d\varphi.$$ Durch Anwendung der

Schwarzschen Ungleichung findet man

$$4\pi^2 \leqq \int_0^{2\pi} D_{z|w}\,d\varphi \int_0^{2\pi}\frac{1}{D_{z|w}}\left|\frac{d\log w}{d\log z}\right|^2 d\varphi \leqq 2\pi(1+m(r))\int_0^{2\pi}\boxed{\frac{d\log w}{d\log z}}\,d\varphi$$

oder

$$\frac{2\pi}{1+m(r)} \leqq \int_0^{2\pi}\boxed{\frac{d\log w}{d\log z}}\,d\varphi.$$

Für beliebige ϱ_1 und ϱ_2, die $\bar{\varrho}_0 < \varrho_1 < \varrho_2$ genügen, bestimmen die Kreise $|z| = r_2(\varrho_1)$ und $z = r_1(\varrho_2)$ einen Kreisring $r' \leqq |z| \leqq r''$ ($r' = r''$ ist möglich). Integration nach $\log r$ über das Intervall $r' \leqq r \leqq r''$ ergibt

$$(7')\qquad 2\pi\int_{r'}^{r''}\frac{1}{1+m(r)}\frac{dr}{r} \leqq \int_{r'}^{r''}\int_0^{2\pi}\boxed{\frac{d\log w}{d\log z}}\,\frac{dr}{r}\,d\varphi.$$

Die rechte Seite von (7′) ist offenbar $\leqq 2\pi\log\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$. Zur Abschätzung der linken Seite wenden wir (5) an mit $q = \frac{1}{2}$. Im Intergrationsintervall $< r', r'' >$ bezeichne Δ die r-Menge, für welche $m(r) > \frac{1}{2}$ ist, $\bar{\Delta}$ die Komplementärmenge. Dann gilt auf $\bar{\Delta}$ $\frac{1}{1+m(r)} \geqq 1-m(r)$. Da-

mit erhalten wir

$$\int_{r'}^{r''} \frac{1}{1+m(r)} \frac{dr}{r} \geqq \int_{\bar{\Delta}} \frac{1}{1+m(r)} \frac{dr}{r} \geqq \int_{\bar{\Delta}} (1-m(r)) \frac{dr}{r}$$

$$= \int_{\Delta+\bar{\Delta}} \frac{dr}{r} - \int_{\bar{\Delta}} \frac{m(r)}{r} dr - \int_{\Delta} \frac{dr}{r} \geqq \log \frac{r''}{r'} - \int_{r'}^{\infty} \frac{m(r)}{r} dr - \frac{h(r')}{2\pi}$$

$= \log \frac{r''}{r'} - \frac{h(r')}{2\pi} - \frac{h(r')}{\pi}$. Mithin folgt aus (7')

$$\log \frac{r''}{r'} \leqq \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{3h(r')}{2\pi}. \tag{7''}$$

Nun gilt wegen $p\varrho_1 \leqq r_1(\varrho_1) < r'$ stets $h(r') \leqq h(p\varrho_1)$. Da für $\log \frac{r''}{r'}$ stets die Schätzung $\log \frac{r''}{r'} \geqq \log \frac{r_1(\varrho_2)}{r_2(\varrho_1)} = \log \frac{r_1(\varrho_2)}{r_1(\varrho_1)} - \omega(\varrho_1)$ (Gleichheit nur für $r_2(\varrho_1) \leqq r_1(\varrho_2)$) richtig ist, erhalten wir schließlich aus (7'')

$$\log \frac{r_1(\varrho_2)}{r_1(\varrho_1)} - \omega(\varrho_1) \leqq \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{3}{2\pi} h(p\varrho_1), \tag{7}$$

gültig für beliebige Werte ϱ_1 und ϱ_2, sofern sie nur die Bedingung $\bar{\varrho}_0 < \varrho_1 < \varrho_2$ erfüllen.

Aus (6) und (7) folgt nun nach einer analogen Rechnung wie bei L. Ahlfors

$$\omega(\varrho) \leqq 3\left(\frac{256\pi^4}{\log \varrho} + 8\pi^2 f(\sqrt{\varrho})\right)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{2} f(\sqrt{\varrho}); \quad \frac{3}{\pi} h(p\varrho) = f(\varrho). \tag{8}$$

(8) gilt für $\varrho \geqq \bar{\varrho}_0$, sofern diese nur der Bedingung

$$\sqrt[3]{\frac{256\pi^4}{\log \varrho} + 8\pi^2 f(\sqrt{\varrho})} \geqq \frac{64\pi^2}{\log \varrho} + f(\sqrt{\varrho})$$

genügen, was für hinreichend große ϱ zutrifft. Aus (6), (7) und (8) erschließt man die Existenz des endlichen Grenzwertes $\lim_{\varrho \to \infty} \log \frac{r_1(\varrho)}{\varrho}$ $= \lim_{\varrho \to \infty} \log \frac{r_2(\varrho)}{\varrho} = \alpha$. Es gilt

$$\left| \log \frac{r_j(\varrho)}{\varrho} - \alpha \right| < H(\varrho, \bar{\varrho}, h), \quad j = 1, 2; \tag{9}$$

die Funktion $H(\varrho, \bar{\varrho}, h)$ läßt sich aus (6), (7) und (8) bestimmen und hängt außer von der durch die Abbildung gegebenen Funktion $h(r)$ nur noch von der fest gewählten Zahl $\bar{\varrho}$ ab. (9) gilt für alle hinreichend großen ϱ, wobei $H(\varrho, \bar{\varrho}, h)$ bei $\varrho \to \infty$ monoton gegen Null geht.

Zu jedem hinreichend großen r gibt es zwei wohlbestimmte ϱ-Werte ϱ_1 und ϱ_2, die $r = r_2(\varrho_1) = r_1(\varrho_2)$ genügen. Das w-Bild von $|z| = r$ liegt also vollständig in dem Kreisring $\varrho_1 \leqq |w| \leqq \varrho_2$. Nach (9) kann man ϱ_1 und ϱ_2 durch r abschätzen und erhält

$$e^{-\alpha} r(1 - \Theta(r)) \leqq \varrho_j \leqq e^{-\alpha} r(1 + \Theta(r)), \quad j = 1, 2 \text{ und } \lim_{r \to \infty} \Theta(r) = 0.$$

Mithin gilt $e^{-\alpha} r(1-\Theta(r)) \leqq |w| \leqq e^{-\alpha} r(1+\Theta(r))$ oder

$$(10)\quad |w| = e^{-\alpha}|z|(1+\varepsilon(|z|)) = a|z|(1+\varepsilon(|z|)),\quad \lim_{|z|\to\infty} \varepsilon(|z|) = 0.$$

Das ist aber die Behauptung.

Für $D_{z|w} - 1 \leqq q r^{-p}$ $(q, p > 0)$ erhält man wegen $h(r) \leqq c_1 r^{-p}$ für alle $\varrho \geqq \varrho^*$, ϱ^* hinreichend groß,

$$(9')\qquad |\log r_j(\varrho) - \log\varrho - \alpha| \leqq c_2 (\log r)^{-1/3},\quad j = 1, 2.$$

Daraus folgt $\log r - \alpha - c_3 (\log r)^{-1/3} < \log \varrho_j < \log r - \alpha + c_3 (\log r)^{-1/3}$, gültig für alle $r \geqq r^*$, also

$$(10')\quad |w| = e^{-\alpha}|z|(1+\varepsilon(r)) \text{ mit } |\varepsilon(r)| < \exp c_3 (\log r)^{-1/3} - 1.$$

Die positive Konstante c_3 hängt nur von den Zahlen $\bar{\varrho}$, p und q ab, nicht aber von r.

3. In einer Note über das Wachstumsverhalten einer speziellen ganzen transzendenten Funktion $w = g(z)$ wurde die folgende Abbildung behandelt. Die zu $w = g(z)$ gehörige Riemannsche Fläche $\mathfrak{W}$ wird durch $z = z(w)$ schlicht und konform in $|z| < \infty$ abgebildet. Daneben wurde die bekannte Fläche $\mathfrak{W}$, von einer einfach zusammenhängenden, endlich vielblättrigen Teilfläche $\mathfrak{T}$ abgesehen, differentialgeometrisch in ein ideal zusammenhängendes Gebiet G_t abgebildet.

G_t entsteht aus der längs der positiv reellen Achse aufgeschlitzten t-Ebene, aus der eine gewisse Umgebung T (Bild der Teilfläche $\mathfrak{T}$) von $t = 0$ auszulassen ist und die Punkte $t = 4\sigma$, $t = \sigma e^{2\pi i}$, $t = \sigma + i\tau$, $\sigma \geqq \sigma_0$, zu identifizieren sind. In den Gebieten D_j, $j = 1, \ldots, 4$, der t-Ebene, die aus den Halbstreifen $(\Re t \geqq 0,\ 0 \leqq \Im t \leqq 2d)$, $(\Re t \leqq 0,\ 0 \leqq \Im t \leqq 2d)$, $(\Re t \leqq 0,\ -d \leqq \Im t \leqq 0)$, $(\Re t \geqq 0,\ -d \leqq \Im t \leqq 0)$ durch Weglassen der Punkte von T entstehen, hat die Abbildung $t \longleftrightarrow z$ einen beschränkten Dilatationsquotienten $(D_{z|t} - 1) \leqq k$, während die Abbildung für $\Im t > 2d$, $\Im t < -d$ konform ist. Durch $t = Z^{a+ib}$, $a = 1$, $b = \frac{\log 4}{2\pi}$, geht G_t in ein Gebiet G_Z der Z-Ebene über, wobei man für G_Z das Gebiet $R_0 \leqq |Z| < \infty$ wählen darf, R_0 hinreichend groß. Durch $Z \to t \to w \to z$ geht G_Z über in ein Gebiet G_z. $z = z(Z)$ vermittelt eine quasikonforme Abbildung zwischen G_Z und G_z. Die stetige Differenzierbarkeit der Abbildung ist lediglich längs endlich vieler Kurvenbögen unterbrochen.

Um den in 2. bewiesenen Satz[6]) anwenden zu können, muß das Integral $\iint_{|Z| \geqq R} (D_{Z|z} - 1)\, \boxed{d \log Z}$ untersucht werden. Wegen

$$\boxed{d \log t} = (a^2 + b^2)\, \boxed{d \log Z}$$

[6]) Die Tatsache, daß die stetige Differenzierbarkeit der Abbildung längs endlich vieler einfacher Kurven unterbrochen ist, behindert die Anwendung des Satzes nicht, da sich der in 2. gegebene Beweis ohne Mühe auf diesen Fall überträgt. Man braucht dazu nur die vorkommenden Integrationswege passend zu zerlegen.

und (2) genügt es, das Integral $\frac{1}{a^2+b^2}\int\int (D_{\log t|z}-1)\boxed{d\log t}$ zu betrachten, wobei über das $\log t$-Bild von $|Z| \geqq R$ zu integrieren ist. Der Kreis $|Z| = R > R_0$ geht in der $\log t$-Ebene über in die Verbindungslinie der Punkte $\log t = (a^2+b^2)\log R - \log 4 + 2\pi i$ und $\log t = (a^2+b^2)\log R$. Unter $\overline{D}_j$ die $\log t$-Bilder von D_j und unter $\overline{D}_j(R)$ das rechts von der angegebenen Strecke gelegene Teilgebiet von $\overline{D}^j$ verstanden, gilt

$$(11)\quad \frac{1}{a^2+b^2}\int\int (D_{\log t|z}-1)\boxed{d\log t} \leqq \frac{k}{a^2+b^2}\sum_{j=1}^{4}\int\int_{\overline{D}_j(R)}\boxed{d\log t}$$

Da mit $R \geqq R_0^* = \mathrm{Max}\,(R_0, (6d)^{1/(a^2+b^2)})$ für $j = 1, \ldots, 4$

$$\int\int_{\overline{D}_j(R)}\boxed{d\log t} < d\,R^{-(a^2+b^2)}$$

erfüllt ist, erhält man

$$\int\int (D_{\log t|z}-1)\boxed{d\log t} < \frac{4\,d\,k}{a^2+b^2}\,R^{-(a^2+b^2)},$$

also für alle $R \geqq R_0^*$

$$(12)\qquad h(R) = \int\int_{|Z|\geqq R}(D_{Z\,z}-1)\boxed{d\log Z} < C_1 R^{-(a^2+b^2)}.$$

Mithin gilt für diese Abbildung die Verzerrungsformel

$$e^{\varkappa}R(1-C_2(\log R)^{-1/3}) \leqq r_j(R) \leqq e^{\varkappa}R(1+C_2(\log R)^{-1/3}),$$

R hinreichend groß und $\varkappa$ eine endliche reelle Zahl. In der oben genannten Arbeit [7]) wurde die etwas bessere Abschätzung abgeleitet (Formel (22))

$$e^{\varkappa}R\left(1-\frac{k_{10}}{\sqrt[6]{R}}\right) \leqq r_j(R) \leqq e^{\varkappa}R\left(1+\frac{k_{10}}{\sqrt[6]{R}}\right).$$

Der angegebene Satz über quasikonforme Abbildungen läßt sich auf Streifengebiete übertragen und lautet: Der Streifen $|\Im\zeta| = |\eta| \leqq b$ sei quasikonform und randstetig auf den Streifen $|\Im w| = |v| \leqq b$ abgebildet, wobei $\zeta = +\infty$ in $w = +\infty$ und $\zeta = -\infty$ in $w = -\infty$ übergehe. Wenn $\int\int_{\Re\zeta\geqq\xi_0}(D_{\zeta|w}-1)\boxed{d\zeta} < \infty$ ist, existiert der Grenzwert $\lim_{\Re\zeta\to+\infty}(\Re w - \Re\zeta)$ und ist endlich.

Als Anwendung dieses Ergebnisses werde die folgende Aufgabe behandelt: Es bezeichne S_z ein Streifengebiet der $z = x+iy$-Ebene, das für $x \geqq x_0$ durch $|y| \leqq \frac{\pi}{2}(1-h(x))$ gegeben ist. $h(x)$ genüge für

[7]) Vgl. l. c. 3).

$x \geqq x_0$ den folgenden Bedingungen: 1) $h(x)$ ist stetig differenzierbar, 2) $0 \leqq h(x) < 1$, $h'(x) \leqq 0$ und $h'(x) \to 0$ bei $x \to \infty$, 3) $\int_{x_0}^{\infty} h(x)\,dx$ ist konvergent. Durch $w = w(z) = u + iv$ wird S_z schlicht und konform auf den Streifen $S_w : |v| \leqq \frac{\pi}{2}$ abgebildet, wobei $\Re w = u \to \pm\infty$ für $\Re z = x \to \pm\infty$ gelten möge. Die Funktion $w = w(z)$ soll für große positive x untersucht werden.

Dabei kann man sich auf den durch $\Re z \geqq x_0$ bestimmten Teil S_z' von S_z und sein Bild S_w' beschränken. Durch

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{\pi}{2f(x)}\,y, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}(1 - h(x)),$$

wird S_z' quasikonform und randstetig auf $S' : \Re\xi \geqq \xi_0 = x_0$, $|\Im\xi| \leqq \frac{\pi}{2}$ abgebildet. Für den Dilatationsquotienten $D_{z|\zeta}$ findet man die für $x \geqq x_1 \geqq x_0$ gültige Abschätzung $D_{z|\zeta} < 1 + 3\,h(x) - 3\,h'(x)$, wobei x_1 so bestimmt ist, daß für alle $x \geqq x_1$ $h(x) \leqq \frac{1}{2}$, $|h'(x)| \leqq \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Durch Zusammensetzung $\zeta \to z \to w$ erhält man eine Funktion, die S_ζ' quasikonform und randstetig auf S_w' abbildet. Der Dilatationsquotient $D_{\zeta|w}$ ist gleich $D_{\zeta|z} = D_{z|\zeta}$. Da wegen

$$\iint\limits_{\Re\zeta \geqq \xi_1} (D_{\zeta|w} - 1)\,\boxed{d\xi} = \int_{\xi_1}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (D_{\zeta|w} - 1)\,d\xi\,d\eta < 3\pi \int_{x_1}^{\infty} h(x)\,dx + 3\pi h(x_1),$$

2) und 3) die Konvergenz des Integrales $\iint\limits_{\Re\zeta \geqq \xi_1} (D_{\zeta|u} - 1)\,\boxed{d\xi}$ feststeht, gilt

(13′) $\lim\limits_{\xi \to +\infty} (\Re w - \Re\xi) = \log\lambda$ oder wegen $x = \xi$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (u(z) - x) = \log\lambda$

mit endlichem $\log\lambda$. Bei der Abbildung $z \to w$ gilt also unter den angegebenen Voraussetzungen

$$\Re w(z) = \log\lambda + x + \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \to 0 \text{ bei } x \to \infty. \tag{13}$$

Daß für das Bestehen von (13) die Bedingung 3) auch notwendig ist, zeigt man nach L. Ahlfors[8]) so. Die Länge $\Theta(x)$ des durch $\Re z = x > x_0$

---

[8]) Ahlfors, L.: Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. Acta Soc. sci. fenn. N. s. 1, Nr. 9 (1930).

Den Nachweis, daß die Konvergenz des Integrales $\int_{x_0}^{\infty} h(x)\,dx$ hinreichend ist für die Existenz eines endlichen von Null verschiedenen λ, gründet L. Ahlfors auf die von ihm abgeleitete zweite Hauptungleichung.

bestimmten Querschnittes Θ_x von S_z' ist $\leqq \pi$. Es sei $u_2(x) = \operatorname{Max}_{\Theta_x} u(z)$, $u_1(x) = \operatorname{Min}_{\Theta_x} u(z)$. Wegen $\int_{\bar{x}}^{x} \frac{dx}{\Theta(x)} \geqq \frac{1}{\pi}(x-\bar{x}) > 2$ für alle $x > \bar{x} + 2\pi > x_0 + 2\pi$ darf man den Randverzerrungssatz anwenden und erhält

$$\pi \int_{\bar{x}}^{x} \frac{dx}{\Theta(x)} - 4\pi < u_1(x) - u_2(\bar{x}).$$

Ist (13) richtig, so gilt für alle hinreichend großen x $u(z) - x < C_1$ und daher auch $u_1(x) - x < C_1$; entsprechend findet man $u_2(x) > x - C_2$. Wählt man $\bar{x}$ und x so groß, daß $u_1(x) < x + C_1$, $u_2(\bar{x}) > \bar{x} - C_2$ und $x > \bar{x} + 2\pi$ erfüllt ist, dann folgt $\pi \int_{\bar{x}}^{x} \frac{dx}{\Theta(x)} < (x-\bar{x}) + C_3$. Wegen

$$\frac{\pi}{\Theta(x)} = \frac{1}{1-h(x)} \geqq 1 + h(x)$$

erhält man schließlich

$$\int_{\bar{x}}^{x} h(x)\,dx < C_3.$$

Das war aber zu beweisen.

Die Funktion $Z = F(W)$, $W = e^w$, $Z = e^z$, ist für $\Re W > 0$ regulär mit nicht negativem Realteil. In $|\arg W| < \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$, strebt dann $\frac{F(W)}{W}$ gleichmäßig gegen einen reellen, endlichen Grenzwert $\geqq 0$. Aus (13) folgt, daß dieser Grenzwert $= \lambda$, also $\neq 0$ ist, sodaß das asymptotische Verhalten gilt

$$Z = F(W) = \lambda W(1 + \varepsilon(|W|)) \tag{14}$$

für $|W| \to \infty$ in $|\arg W| < \frac{\pi}{2} - \delta$.

Das einfach zusammenhängende Teilgebiet G_Z, $Z = X + iY = Re^{i\Phi}$, von $\Re Z > 0$ sei symmetrisch bezüglich $\Im Z = 0$ und werde von einer Kurve Γ mit der Parameterdarstellung $Z = Re^{i(\pi/2 - H(R))}$ (Zweig von Γ in $\Im Z \geqq 0$) berandet. Die für $R \geqq 0$ eineindeutige, stetige und nichtnegative Funktion $H(R) < \frac{\pi}{2}$ sei für $R \geqq R_0$ stetig differenzierbar und genüge den Bedingungen $H'(R) \leqq 0$, $RH'(R) \to 0$ bei $R \to \infty$. Die Funktion $Z = F(W)$ bilde $\Re W > 0$ schlicht und konform in G_Z ab, sodaß die Punkte $W = 0$, $W = \infty$ den Punkten $Z = 0$, $Z = \infty$ entsprechen. Dann ist die Konvergenz des Integrales $\int^{\infty} H(R) \frac{dR}{R}$ notwendig und hinreichend dafür, daß der nichtnegative endliche Grenzwert $\lambda = \lim \frac{F(W)}{W}$ für $|W| \to \infty$ in $|\arg W| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$, positiv ist.

Dieser Beweis eines Satzes von J. Wolff[9]) zeigt, daß man Γ für $R \leqq R_0$ beliebig abändern kann, ohne daß die Aussage des Satzes hinfällig wird. Wesentlich ist nur, daß der durch $R \geqq R_0$ bestimmte Teil von G_Z symmetrisch ist und dort die Randkontur Γ den angegebenen Bedingungen genügt. Diese Abänderung kann insbesondere so geschehen, daß G_Z nicht mehr Teilgebiet von $\Re Z > 0$ ist und $Z = 0$ innerer Punkt von G_Z ist. In diesem Falle ist die Normierung der Abbildungsfunktion auch noch gültig, kann aber auch entsprechend abgeändert werden.

---

[9]) Wolff, J.: C. r. Acad. Sci. Paris 191 (1930) S. 921—923.

G. Elfving benutzte den Wolffschen Satz in der Arbeit „Zur Flächenstruktur und Wertverteilung. Ein Beispiel. Acta Acad. Aboensis. Math. et Phys. 8 (1935)" zur Untersuchung von Verzerrungen bei konformer Abbildung. Bei einer entsprechenden Behandlung von E. Ullrichs Flächen mit endlich vielen periodischen Enden tritt an die Stelle dieses Beweiselementes der bewiesene Satz über quasikonforme Abbildungen.

(Eingegangen am 26. August 1944.)

Über Zerlegungen in ungleiche Quadratzahlen[1]).

Von

R. Sprague in Berlin-Charlottenburg.

Eine dissertatio Schmidtiana, die von Herrn Stöhr, hatte Zerlegungen von Rechtecken in paarweis inkongruente Quadrate zum Gegenstand.

In gewisser Analogie zu der geometrischen steht die zahlentheoretische Frage, welche natürlichen Zahlen in lauter voneinander verschiedene Quadratzahlen zerlegbar sind.

Trotz der Einfachheit der Beweisidee scheint das hier gezeigte Ergebnis neu zu sein.

Aus den Quadraten $\leqq q_0^2$ seien Darstellungen der gewünschten Art für eine so lange Serie von n_0 aufeinanderfolgenden Zahlen gewonnen, daß

$$\sqrt{n_0} - q_0 \geqq 1$$

gilt.

Dann existiert wenigstens eine Zahl q_1^2 mit der Eigenschaft

$$q_0^2 < q_1^2 \leqq n_0,$$

die also, zu den q_1^2 größten Zahlen addiert, die Serie unmittelbar auf

$$n_1 = n_0 + q_1^2$$

Glieder verlängert.

Dies Verfahren läßt sich unbegrenzt iterieren.

Denn aus

$$q_{k-1}^2 < q_k^2 \leqq n_{k-1}$$

folgt

$$\sqrt{n_k} - q_k = \sqrt{n_{k-1} + q_k^2} - q_k \geqq q_k(\sqrt{2} - 1),$$

also, da offenbar schon $q_0 > 2$ sein muß, gewiß

$$\sqrt{n_k} - q_k \geqq 1$$

und die Anzahl der für q_{k+1} zulässigen Werte wächst mit k unbeschränkt.

Die folgende Tabelle betrifft eine mit 129 beginnende Serie. Ihre Lücken sind bis 192 leicht zu ergänzen durch Addition von einer oder mehreren der Zahlen 1^2, 2^2, 3^2 zu geeigneten Zerlegungen ohne die betreffenden Summanden. Für die Zahlen von 193 bis 256 ergeben sich dann Zerlegungen aus denen von 192 bis 129 durch Übergang zu den

[1]) Zum siebzigsten Geburtstage von E. Schmidt.

entsprechenden Komplementärmengen der ersten zehn Quadratzahlen. So ist mit $n_0 = 128$ und $q_0 = 10$

$$\sqrt{n_0} - q_0 \geqq 1$$

sichergestellt.

$129 = 10^2+5^2+2^2$
$130 = 9^2+7^2$
$132 = 9^2+5^2+4^2+3^2+1^2$
$133 = 9^2+6^2+4^2$
$138 = 8^2+7^2+5^2$
$141 = 10^2+5^2+4^2$
$149 = 10^2+7^2$
$152 = 10^2+6^2+4^2$
$155 = 9^2+7^2+5^2$
$166 = 9^2+7^2+6^2$
$171 = 9^2+7^2+5^2+4^2$
$173 = 10^2+8^2+3^2$
$174 = 10^2+7^2+5^2$
$182 = 9^2+7^2+6^2+4^2$
$189 = 10^2+8^2+5^2$.

Ergebnis: Jede Zahl oberhalb 128 ist darstellbar als Summe von lauter verschiedenen Gliedern einer Teilfolge der Quadratzahlen; es gibt unendlich viele solche Teilfolgen.

(Eingegangen am 24. April 1946.)

Ein Kriterium für das Nichtverschwinden von Determinanten.

Von

M. Müller in Tübingen.

Herr A. Ostrowski hat, Ergebnisse von Minkowski und Hadamard verschärfend, bewiesen, daß eine n-reihige Determinante $D = |d_{\mu\nu}|$, für welche die n Zahlen

$$h_\mu = |d_{\mu\mu}| - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} |d_{\mu\nu}| \qquad (\mu = 1, 2, .., n)$$

positiv sind, die Ungleichung

$$|D| \geqq h_1 h_2 .. h_n$$

erfüllt, also insbesondere von Null verschieden ist[1]).

Es sei mir der Hinweis gestattet, daß sich daß Ostrowskische Ergebnis durch eine leichte Verallgemeinerung abrunden läßt zu dem

Satz. *Die n-reihige Determinante $A = |a_{\mu\nu}|$ ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn es n^2 Zahlen $b_{\mu\nu}$ gibt, die die n Ungleichungen*

$$(1) \qquad H_\mu = \left| \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\mu\varkappa} b_{\mu\varkappa} \right| - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} \left| \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\mu\varkappa} b_{\nu\varkappa} \right| > 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen. Für jede solche Matrix $\|b_{\mu\nu}\|$ ist, wenn $B = |b_{\mu\nu}|$ gesetzt wird,

$$(2) \qquad |A| \geqq \frac{H_1 H_2 .. H_n}{|B|}.$$

Beweis. Um nachzuweisen, daß aus der Voraussetzung, daß die n Ungleichungen (1) gelten, die Ungleichung (2) folgt, bilden wir die Determinante

$$D = \frac{AB}{H_1 H_2 .. H_n}$$

mit den Elementen

$$d_{\mu\nu} = \frac{1}{H_\mu} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\mu\varkappa} b_{\nu\varkappa} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, .., n),$$

für welche

$$h_\mu = |d_{\mu\mu}| - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq u}}^{n} |d_{\mu\nu}| = \frac{H_\mu}{H_\mu} = 1 \quad (\mu = 1, 2, .., n)$$

[1]) A. Ostrowski, Sur la détermination des bornes inférieurs pour une classe des déterminantes. Bulletin des sciences mathématiques (2), **61**, 1937, S. 19—32.

wird, und betrachten das homogene lineare Gleichungssystem

$$(3)\qquad \begin{cases} (d_{11}-\lambda)x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \cdots\cdots + (d_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Ist λ_* irgend eine Wurzel seiner charakteristischen Gleichung, so gibt es dazu eine Lösung $x_1^*, \ldots, x_n^*$ des Systemes (3), bei der

$$\operatorname*{Max}_{\varrho=1,\ldots,n} |x_\varrho^*| = |x_\sigma^*| > 0$$

ist, und aus der σ-ten der Gleichungen (3) folgt, daß

$$\lambda_* x_\sigma^* = d_{\sigma 1}x_1^* + \cdots\cdots + d_{\sigma n}x_n^*,$$

$$\lambda_* = d_{\sigma 1}\frac{x_1^*}{x_\sigma^*} + \cdots\cdots + d_{\sigma n}\frac{x_n^*}{x_\sigma^*},$$

$$|\lambda_*| \geqq |d_{\sigma\sigma}| - \left|\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\sigma}}^{n} d_{\sigma\nu}\frac{x_\nu^*}{x_\sigma^*}\right| \geqq |d_{\sigma\sigma}| - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\sigma}}^{n} |d_{\sigma\nu}| = 1.$$

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die n charakteristischen Zahlen des Systemes (3), so ist also

$$|D| = |\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n| \geqq 1,$$

d. h.

$$|AB| \geqq H_1 H_2 \ldots H_n > 0,$$

also $B \neq 0$ und

$$|A| \geqq \frac{H_1 H_2 \ldots H_n}{|B|}.$$

Um nachzuweisen, daß für eine nichtverschwindende Determinante A immer n^2 Zahlen $b_{\mu\nu}$ gefunden werden können, die die n Ungleichungen (1) erfüllen, wählen wir $b_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}$, d. h. gleich dem algebraischen Komplement des Elementes $a_{\mu\nu}$ in der Determinante A. Es wird $H_\mu = |A| > 0$ für $\mu = 1, 2, \ldots, n$, die Ungleichungen (1) sind also erfüllt.

Überdies wird bei dieser Wahl der $b_{\mu\nu}$ die Determinante $B = A^{n-1} \neq 0$ und

$$\frac{H_1 H_2 \ldots H_n}{|B|} = \frac{|A|^n}{|A|^{n-1}} = |A|,$$

die Abschätzung (2) also scharf. Diese Feststellung zeigt, daß die Ungleichung (2) eine günstige Abschätzung von $|A|$ nach unten liefern wird, wenn man sich bemüht, $b_{\mu\nu}$ möglichst angenähert gleich $A_{\mu\nu}$ zu wählen.

Unser Satz bleibt richtig, wenn man in den Ungleichungen (1) bei a oder b oder bei a und b den Summationsindex $\varkappa$ an die erste Stelle setzt; es kommt dies darauf hinaus, daß wir in der vorstehenden Herleitung der Ungleichung (2) bei der Bildung des Produktes AB nicht Zeilen mit Zeilen, sondern Zeilen mit Spalten oder Spalten mit Spalten zu multiplizieren haben.

Zum Schluß wollen wir noch auf einige hinreichende Bedingungen für das Nichtverschwinden einer Determinante hinweisen, die sich aus unserem Satz durch spezielle Wahl der $b_{\mu\nu}$ ergeben:

Setzt man speziell $b_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, wo $\delta_{\mu\mu} = 1$ und $\delta_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$, so wird $B = 1$ und

$$H_\mu = |a_{\mu\mu}| - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} |a_{\mu\nu}| \qquad (\mu = 1, 2, .., n),$$

dann entsteht der Satz von Ostrowski.

Sind $p_1, \ldots, p_n$ positive Zahlen und setzt man $b_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} p_\mu$, so wird $B = p_1 p_2 .. p_n > 0$,

$$H_\mu = |a_{\mu\mu}|\, p_\mu - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} |a_{\mu\nu}|\, p_\nu \qquad (\mu = 1, 2, .., n),$$

$$|A| \geqq \frac{H_1 H_2 .. H_n}{p_1 p_2 .. p_n};$$

dies ist die Präzisierung eines Ergebnisses von H. v. Koch [2]).

Ist $\varkappa_1, \varkappa_2, .., \varkappa_n$ irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2, .., n$, und setzt man $b_{\mu\nu} = 1$ für $\nu = \varkappa_\mu$, $b_{\mu\nu} = 0$ für $\nu \neq \varkappa_\mu$, so ist $|B| = 1$, und es ergibt sich: Die Determinante A ist von Null verschieden, wenn die n Ungleichungen

$$H_\mu = |a_{\mu\varkappa_\mu}| - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \varkappa_\mu}}^{n} |a_{\mu\nu}| > 0 \qquad (\mu = 1, 2, .., n) \tag{4}$$

gelten. D. h. eine Determinante ist gewiß dann von Null verschieden, wenn in jeder Zeile ein Element alle übrigen (in der durch die Ungleichungen (4) beschriebenen Weise) überwiegt, und zwar in jeder Zeile ein anderes Element.

Setzt man $b_{\mu\nu} = \bar{a}_{\mu\nu}$, wo $\bar{a}_{\mu\nu}$ die zu $a_{\mu\nu}$ konjugiert-komplexe Zahl bedeutet, so ergibt sich: Sind die n Zahlen

$$H_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{n} |a_{\mu\varkappa}|^2 - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} \left| \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\mu\varkappa} \bar{a}_{\nu\varkappa} \right| \qquad (\mu = 1, 2, .., n)$$

alle positiv, so ist

$$|A| \geqq \sqrt{H_1 H_2 .. H_n} > 0.$$

[2]) H. v. Koch, Über das Nichtverschwinden einer Determinante nebst Bemerkungen über Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen. Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung **22**, 1913, S. 285—291, bes. S. 287.

(Eingegangen am 6. Mai 1946.)

Folgen gleichgradig integrierbarer Funktionen und die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration.

Von

M. Müller in Tübingen.

In dieser Note beweisen wir einen einfachen Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration im Rahmen der RIEMANNschen Theorie des Integrales, indem wir den Begriff der gleichgradigen *R*-Integrierbarkeit der Funktionen der Folge zu Grunde legen. Dieser Satz umfaßt insbesondere den bekannten Satz von WEIERSTRASS, wonach ein gleichmäßiger Grenzübergang und Integration vertauschbar sind; er ist seinerseits in dem Vertauschbarkeitssatz von ARZELA enthalten, aber wesentlich einfacher beweisbar als dieser.

§ 1.

Bezeichnungen und der allgemeine Satz.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_\varrho < x_{\varrho+1} < \ldots < x_r = b$$

des Intervalles $\langle a, b\rangle$ und setzen

$$i_\varrho = x_{\varrho+1} - x_\varrho \qquad (\varrho = 0, 1, .., r-1),$$
$$\Delta_{\mathfrak{Z}} = \operatorname{Max}\{i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}\}.$$

Jede der Funktionen $f_n(x)$ sei im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definiert und beschränkt; es sei

$$g_{n\varrho} = \operatorname*{fin\,inf}_{x_\varrho \leqq x \leqq x_{\varrho+1}} f_n(x), \quad G_{n\varrho} = \operatorname*{fin\,sup}_{x_\varrho \leqq x \leqq x_{\varrho+1}} f_n(x),$$
$$\sigma_{n\varrho} = \sigma_n(x_\varrho, x_{\varrho+1}) = G_{n\varrho} - g_{n\varrho}.$$

Handelt es sich um eine Funktion $f(x)$, so bezeichnen wir die entsprechenden Größen mit $g_\varrho, G_\varrho, \sigma_\varrho = \sigma(x_\varrho, x_{\varrho+1})$. Handelt es sich um Funktionen $f_n^*(x)$, so bezeichnen wir diese Größen mit $g_{n\varrho}^*, G_{n\varrho}^*, \sigma_{n\varrho}^* = \sigma_n^*(x_\varrho, x_{\varrho+1})$ usw.

Die Funktionen $f_n(x)$ sollen über das Intervall $a \leqq x \leqq b$ *gleichgradig R-integrierbar* heißen, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon)$ gibt, so daß

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho < \varepsilon \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

sobald $\Delta_{\mathfrak{Z}} < \delta(\varepsilon)$ ist. Da im Folgenden allein der RIEMANNsche Integralbegriff benutzt wird, werden wir kürzer auch gleichgradig integrierbar sagen.

Wir bemerken zunächst

Satz 1. *Sind die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gleichgradig integrierbar und ist*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = A$$

vorhanden, so sind die Funktionen in diesem Intervall gleichmäßig beschränkt. Ist sogar

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

im Intervall $a \leqq x \leqq b$ vorhanden, so ist also $f(x)$ in $\langle a, b\rangle$ beschränkt.

Beweis. Da die Folge $\{f_n(a)\}$ konvergiert, gibt es eine Konstante s derart, daß $|f_n(a)| < s$ für alle n. Da die Funktionen $f_n(x)$ über das Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig integrierbar sind, gibt es insbesondere eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$, bei der

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho < 1 \text{ für alle } n.$$

Wir wählen die positive Zahl μ so, daß $i_\varrho \geqq \mu$ für $\varrho = 0, 1, \ldots, r-1$. Es sei $x_\varrho \leqq x \leqq x_{\varrho+1}$. Dann ist

$$|f_n(x) - f_n(a)| \leqq |f_n(x) - f_n(x_\varrho)| + |f_n(x_\varrho) - f_n(x_{\varrho-1})| + \cdots + |f_n(x_1) - f_n(a)|$$

$$\leqq \sigma_{n\varrho} + \sigma_{n,\varrho-1} + \cdots + \sigma_{n0} \leqq \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} \leqq \frac{1}{\mu} \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho < \frac{1}{\mu},$$

$$|f_n(x)| \leqq |f_n(a)| + \frac{1}{\mu} \leqq s + \frac{1}{\mu} = S,$$

wo S eine von n und der speziellen Wahl der Stelle x im Intervall $\langle a, b\rangle$ unabhängige Konstante ist. Die Funktionen $f_n(x)$ sind also im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig beschränkt.

Jetzt können wir den angekündigten Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration beweisen:

Satz 2. *Sind die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ über das Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig R-integrierbar und ist in diesem Intervall die Grenzfunktion*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

vorhanden, so ist $f(x)$ über das Intervall $\langle a, b\rangle$ R-integrierbar und

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Beweis: Nach Satz 1 ist $f(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ beschränkt.

Es sei $\varepsilon > 0$; wir wählen die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ so fein, daß $\Delta_{\mathfrak{Z}} < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ wird; dann ist wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit der Funktionen $f_n(x)$ für alle n

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Es sei σ_ϱ die Schwankung der Funktion $f(x)$ im Teilintervall $\langle x_\varrho, x_{\varrho+1}\rangle$. Dann gibt es zwei Stellen x'_ϱ und x''_ϱ in diesem Teilintervall, so daß

$$0 < \sigma_\varrho - (f(x'_\varrho) - f(x''_\varrho)) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{3}$$

Wir können wegen der Konvergenz der Folge $\{f_n(x)\}$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ ein $N(\varepsilon)$ derart finden, daß für $n > N(\varepsilon)$ die $2r$ Ungleichungen

$$\begin{cases} |f_n(x'_\varrho) - f(x'_\varrho)| < \frac{\varepsilon}{8(b-a)} \\ |f_n(x''_\varrho) - f(x''_\varrho)| < \frac{\varepsilon}{8(b-a)} \end{cases} \quad (\varrho = 0, 1, \ldots, r-1) \tag{4}$$

gelten. Aus den Ungleichungen (3) und (4) folgt, daß

$$\sigma_\varrho = [\sigma_\varrho - (f(x'_\varrho) - f(x''_\varrho))] + [f(x'_\varrho) - f_n(x'_\varrho)] + [f_n(x''_\varrho) - f(x''_\varrho)] + [f_n(x'_\varrho) - f_n(x''_\varrho)]$$
$$< \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \frac{\varepsilon}{8(b-a)} + \frac{\varepsilon}{8(b-a)} + \sigma_{n\varrho} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \sigma_{n\varrho},$$

und hieraus mit Rücksicht auf die Ungleichung (2), daß

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_\varrho i_\varrho < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\varrho=0}^{r-1} i_\varrho + \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho < \varepsilon. \tag{5}$$

Hiernach ist $f(x)$ über das Intervall $\langle a, b\rangle$ eigentlich R-integrierbar.

Nach den bisherigen Überlegungen sind unter den Voraussetzungen des Satzes 2 die Funktionen $f_n(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig beschränkt und mitsamt ihrer Grenzfunktion $f(x)$ über dieses Intervall R-integrierbar. Nach einem bekannten Satz von Arzelà [1]) besteht also die Beziehung (1).

---

[1]) Den Arzelàschen Satz und Literaturangaben findet man in der Encyklopädie der math. Wissenschaften Bd. II_3, zweite Hälfte, S. 1076—1078. Außer den dort genannten Beweisen sind mir noch bekannt geworden eine Überarbeitung des Beweises von Bieberbach und Landau durch H. S. Carlslaw a. unten in [5]) a. O., ferner ein Beweis von F. Hausdorff („Beweis eines Satzes von Arzelà". Math. Zeitschr. **26**, 1927, S. 135—137), der von W. Rogosinski in seinem Göschen-Bändchen „Fouriersche Reihen" auf S. 119—123 reproduziert wird, und ein sich an Arzelà's Originalbeweis anlehnender Beweis von J. Wolff („Eenvoudig Bewijs van de stelling van Arzelà-Osgood der integralrekening". Mathematica, Zutphen, B 10, 1941, S. 90—93). Der Beweis von V. Jarnik in Časopis **57**, 1928, S. 103—113 war mir nicht zugänglich.

Um nun aber die Beziehung (1) ohne Berufung auf den ARZELÀschen Satz, dessen Beweise wesentlich weiter ausholen, einfach zu beweisen und damit die besondere Behandlung des Satzes 2 zu rechtfertigen, bilden wir

$$(6)\qquad \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{\varrho=0}^{r-1} f(x'_\varrho)\,i_\varrho + \sum_{\varrho=0}^{r-1} [f(x'_\varrho) - f_n(x'_\varrho)]\,i_\varrho + \sum_{\varrho=0}^{r-1} f_n(x'_\varrho)\,i_\varrho - \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist für $\varrho = 0, 1, \ldots, r-1$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{\varrho=0}^{r-1} f(x'_\varrho)\,i_\varrho = \sum_{\varrho=0}^{r-1} [\gamma_\varrho - f(x'_\varrho)]\,i_\varrho,$$

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} f_n(x'_\varrho)\,i_\varrho - \int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{\varrho=0}^{r-1} [f_n(x'_\varrho) - \gamma_{n\varrho}]\,i_\varrho,$$

wo γ_ϱ eine zwischen g_ϱ und G_ϱ, $\gamma_{n\varrho}$ eine zwischen $g_{n\varrho}$ und $G_{n\varrho}$ gelegene Zahl bedeutet. Es ist also

$$|\gamma_\varrho - f(x'_\varrho)| \leqq \sigma_\varrho, \quad |f_n(x'_\varrho) - \gamma_{n\varrho}| \leqq \sigma_{n\varrho}$$

und mit Rücksicht auf (5), bzw. (2)

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{\varrho=0}^{r-1} f(x'_\varrho)\,i_\varrho \right| \leqq \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_\varrho\, i_\varrho < \varepsilon,$$

$$\left| \sum_{\varrho=0}^{r-1} f_n(x'_\varrho)\,i_\varrho - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leqq \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho}\, i_\varrho < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle n. Aus (6) folgt damit, wenn wir noch die Ungleichungen (4) beachten, daß für $n > N(\varepsilon)$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{8\,(b-a)} \sum_{\varrho=0}^{r-1} i_\varrho + \frac{\varepsilon}{2} < 2\,\varepsilon,$$

d. h. die Gültigkeit der Gleichung (1).

§ 2.

Hinreichende Bedingungen für gleichgradige Integrierbarkeit.

Nachdem Satz 2 vorliegt, kommt es nur noch darauf an, geeignete Bedingungen anzugeben, unter denen die Funktionen $f_n(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig integrierbar sind.

Satz 3. *Die Funktionen $f_n(x)$ sind im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig R-integrierbar, wenn sie dort gleichgradig stetig sind.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jeder positiven Zahl ε ein $\delta(\varepsilon)$ derart, daß

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

sobald $a \leqq x' \leqq b$, $a \leqq x'' \leqq b$ und dabei $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$. Dann ist auch $\sigma_{n\varrho} < \frac{\varepsilon}{b-a}$, sobald die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ so fein ist, daß $\Delta_{\mathfrak{Z}} < \delta(\varepsilon)$, also auch

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho < \varepsilon \text{ für alle } n;$$

die Funktionen sind also gleichgradig integrierbar.

Satz 4. *Sind die Funktionen $f_n(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig stetig und existiert*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

in diesem Intervall, so ist auch $f(x)$ über das Intervall $\langle a, b\rangle$ integrierbar und es gilt die Formel (1).

Dies folgt unmittelbar aus Satz 2 und Satz 3, kann aber, da bekanntlich[2]) eine konvergente Folge gleichgradig stetiger Funktionen gleichmäßig konvergiert, auch aus dem unten folgenden Satz 9 gefolgert werden.

Satz 5. *Sind die Funktionen $f_n(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig beschränkt, ist etwa*

$$|f_n(x)| < M \text{ für } a \leqq x \leqq b, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

und gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z}^*: \qquad a = x_0^* < x_1^* < \ldots < x_\varrho^* < x_{\varrho+1}^* < \ldots < x_{r^*}^* = b$$

derart, daß mit der Abkürzung $i_\varrho^* = x_{\varrho+1}^* - x_\varrho^*$ die Ungleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{r^*-1} \sigma_n(x_\varrho^*, x_{\varrho+1}^*)\, i_\varrho^* < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n \tag{7}$$

gilt, so gelten für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$, bei welcher

$$\Delta_{\mathfrak{Z}} < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4 r^* M}, \tag{8}$$

die Ungleichungen

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho < \varepsilon \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{9}$$

dann sind also die Funktionen $f_n(x)$ über das Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig R-integrierbar.

Beweis. Wir bilden die Zerlegung $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}^*$, die sowohl die Teilpunkte von $\mathfrak{Z}$ als auch die Teilpunkte von $\mathfrak{Z}^*$ zu Teilpunkten

$$x_0' < x_1' < \ldots < x_\varrho' < x_{\varrho+1}' < \ldots < x_{r'}'$$

hat.

---

[2]) Vgl. etwa C. Carathéodory, Reelle Funktionen I, Leipzig u. Berlin 1939, S. 180, oder auch Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik I, 2. Aufl., Berlin 1931, S. 50.

Es ist

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho = \left\{ \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_n(x_\varrho, x_{\varrho+1})\, i_\varrho - \sum_{\varrho=0}^{r'-1} \sigma_n(x'_\varrho, x'_{\varrho+1})\, i'_\varrho \right\}$$

$$+ \left\{ \sum_{\varrho=0}^{r'-1} \sigma_n(x'_\varrho, x'_{\varrho+1})\, i'_\varrho - \sum_{\varrho=0}^{r^*-1} \sigma_n(x^*_\varrho, x^*_{\varrho+1})\, i^*_\varrho \right\} + \sum_{\varrho=0}^{r^*-1} \sigma_n(x^*_\varrho, x^*_{\varrho+1})\, i^*_\varrho .$$

Nach (7) ist die letzte Summe auf der rechten Seite kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$. Da die Zerlegung $\mathfrak{Z}'$ eine Verfeinerung der Zerlegung $\mathfrak{Z}^*$ ist und beim Übergang zu einem Teilintervall die Schwankung einer Funktion nicht zunehmen kann, ist die zweite geschweifte Klammer nicht positiv. Es folgt also, daß

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho < \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_n(x_\varrho, x_{\varrho+1})\, i_\varrho - \sum_{\varrho=0}^{r'-1} \sigma_n(x'_\varrho, x'_{\varrho+1})\, i'_\varrho + \frac{\varepsilon}{2} . \tag{10}$$

Bezeichnet man diejenigen Teilpunkte der Zerlegung $\mathfrak{Z}'$, die in das Intervall $\langle x_\varrho, x_{\varrho+1}\rangle$ fallen, mit

$$x_\varrho = \xi_{\varrho 0} < \xi_{\varrho 1} < \ldots < \xi_{\varrho\lambda} < \ldots < \xi_{\varrho l_\varrho} = x_{\varrho+1}$$

und setzt

$$\xi_{\varrho,\lambda+1} - \xi_{\varrho\lambda} = i_{\varrho\lambda} ,$$

so kann

$$\sum_{\varrho=0}^{r'-1} \sigma_n(x'_\varrho, x'_{\varrho+1})\, i'_\varrho = \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sum_{\lambda=0}^{l_\varrho-1} \sigma_n(\xi_{\varrho\lambda}, \xi_{\varrho,\lambda+1})\, i_{\varrho\lambda}$$

geschrieben werden. Nun ist aber, falls $l_\varrho > 1$ ist, nach (8)

$$\sigma_n(x_\varrho, x_{\varrho+1})\, i_\varrho - \sum_{\lambda=0}^{l_\varrho-1} \sigma_n(\xi_{\varrho\lambda}, \xi_{\varrho,\lambda+1})\, i_{\varrho\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{l_\varrho-1} [\sigma_n(x_\varrho, x_{\varrho+1}) - \sigma_n(\xi_{\varrho\lambda}, \xi_{\varrho,\lambda+1})]\, i_{\varrho\lambda} \leqq 2M \sum_{\lambda=0}^{l_\varrho-1} i_{\varrho\lambda} = 2M i_\varrho < 2M \Delta_{\mathfrak{Z}} < \frac{\varepsilon}{2r^*} ,$$

und, falls $l_\varrho = 1$ ist,

$$\sigma_n(x_\varrho, x_{\varrho+1})\, i_\varrho - \sum_{\lambda=0}^{l_\varrho-1} \sigma_n(\xi_{\varrho\lambda}, \xi_{\varrho,\lambda+1})\, i_{\varrho\lambda} = 0 .$$

Es ist aber l_ϱ nur für diejenigen der Zahlen $\varrho = 0, 1, \ldots, r-1$ größer als 1, für welche ein Teilpunkt von $\mathfrak{Z}^*$ in das Intervall $(x_\varrho, x_{\varrho+1})$ hineinfällt, also höchstens so oft größer als 1, als $\mathfrak{Z}^*$ Teilpunkte hat, d. h. höchstens r^*-mal. In der Summe

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_n(x_\varrho, x_{\varrho+1}) i_\varrho - \sum_{\varrho=0}^{r'-1} \sigma_n(x'_\varrho, x'_{\varrho+1})\, i'_\varrho = \sum_{\varrho=0}^{r-1} [\sigma_n(x_\varrho, x_{\varrho+1})\, i_\varrho - \sum_{\lambda=0}^{l_\varrho-1} \sigma_n(\xi_{\varrho\lambda}, \xi_{\varrho,\lambda+1}) i_{\varrho\lambda}]$$

sind also höchstens r^* Summanden positiv und dann kleiner als $\frac{\varepsilon}{2r^*}$, die übrigen Summanden sind gleich 0; diese Summe ist also kleiner

als $\frac{\varepsilon}{2}$. Mit Rücksicht auf (10) gilt also die Ungleichung (9), die, weil ε beliebig nahe bei 0 gewählt sein konnte, besagt, daß die Funktionen $f_n(x)$ gleichgradig integrierbar sind.

Satz 6. *Die Funktionen $f_n(x)$ sind im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig R-integrierbar, wenn sie dort gleichmäßig beschränkt sind und wenn jede einzelne Funktion $f_n(x)$ in diesem Intervall monoton ist.*

Beweis: Es sei im Intervall $\langle a, b\rangle$

$$|f_n(x)| < M \text{ für alle } n$$

und die positive Zahl ε beliebig vorgeschrieben. Wir wählen speziell

$$x_\varrho^* = a + \varrho \frac{b-a}{r^*} \qquad (\varrho = 0, 1, .., r^* - 1)$$

und dabei die ganze Zahl

$$r^* \geqq \frac{4\,M(b-a)}{\varepsilon}.$$

Steigt $f_n(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$, so ist

$$\sigma_n(x_\varrho^*, x_{\varrho+1}^*) = f_n(x_{\varrho+1}^*) - f_n(x_\varrho^*),$$

also bei dieser Wahl von r^*

$$\sum_{\varrho=0}^{r^*-1} \sigma_n(x_\varrho^*, x_{\varrho+1}^*)\, i_\varrho^* = \sum_{\varrho=0}^{r^*-1} [f_n(x_{\varrho+1}^*) - f_n(x_\varrho^*)] \frac{b-a}{r^*}$$

$$= \frac{b-a}{r^*}[f_n(b) - f_n(a)] < \frac{2\,M(b-a)}{r^*} \leqq \frac{\varepsilon}{2};$$

fällt $f_n(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$, so ist

$$\sigma_n(x_\varrho^*, x_{\varrho+1}^*) = f_n(x_\varrho^*) - f_n(x_{\varrho+1}^*),$$

also

$$\sum_{\varrho=0}^{r^*-1} \sigma_n(x_\varrho^*, x_{\varrho+1}^*)\, i_\varrho^* = \sum_{\varrho=0}^{r^*-1} [f_n(x_\varrho^*) - f_n(x_{\varrho+1}^*)] \frac{b-a}{r^*}$$

$$= \frac{b-a}{r^*}[f_n(a) - f_n(b)] < \frac{2\,M(b-a)}{r^*} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Satz 5 ist daher für alle n, sobald nur

$$\Delta_3 < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4\,r^*\,M}$$

gewählt wird,

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho}\, i < \varepsilon;$$

die Funktionen $f_n(x)$ sind daher gleichgradig integrierbar.

Satz 7. *Die Funktionen $f_n(x)$ sind im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig integrierbar, wenn die Zahlenfolge $\{f_n(a)\}$ beschränkt ist und die Funktionen $f_n(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ von gleichmäßig beschränkter Schwankung sind.*

Wir nennen dabei die Funktionen $f_n(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ von gleichmäßig beschränkter Schwankung, wenn es eine Konstante K derart gibt, daß für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ des Intervalles $\langle a, b\rangle$ und alle n

$$|f_n(x_0) - f_n(x_1)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + \cdots + |f_n(x_{r-1}) - f_n(x_r)| \leqq K$$

bleibt[3]).

Beweis für Satz 7. Jedes $f_n(x)$ können wir als Funktion von beschränkter Schwankung darstellen in der Form

$$f_n(x) = f_n^*(x) + f_n^{**}(x), \tag{11}$$

wobei $f_n^*(x)$ und $f_n^{**}(x)$ in $\langle a, b\rangle$ monotone Funktionen sind, die die Ungleichungen

$$|f_n^*(x)| \leqq K + \tfrac{1}{2}|f_n(a)|, \quad |f_n^{**}(x)| \leqq K + \tfrac{1}{2}|f_n(a)|$$

befriedigen, also in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig beschränkt sind. Nach Satz 6 sind daher die Funktionen $f_n^*(x)$ und $f_n^{**}(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig R-integrierbar. Es gibt also zu jeder positiven Zahl ε ein $\delta(\varepsilon)$ derart, daß für $\Delta_{\mathfrak{Z}} < \delta(\varepsilon)$ und alle n

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho}^* i_\varrho < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho}^{**} i_\varrho < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Sind x' und x'' irgend zwei Stellen desselben Teilintervalles $\langle x_\varrho, x_{\varrho+1}\rangle$, so ist nach (11)

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqq |f_n^*(x') - f_n^*(x'')| + |f_n^{**}(x') - f_n^{**}(x'')| \leqq \sigma_{n\varrho}^* + \sigma_{n\varrho}^{**},$$

daher auch $\sigma_{n\varrho} \leqq \sigma_{n\varrho}^* + \sigma_{n\varrho}^{**}$ und schließlich nach (12)

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho < \varepsilon$$

für alle n, sobald $\Delta_{\mathfrak{Z}} < \delta(\varepsilon)$. Die Funktionen $f_n(x)$ sind also im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig integrierbar.

§ 3.

Der Satz von Weierstraß und eine Verallgemeinerung von Carlslaw.

Satz 8. *Die Funktionen $f_n(x)$ sind im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig R-integrierbar, wenn dort jedes $f_n(x)$ integrierbar ist und die Folge $\{f_n(x)\}$ gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jeder positiven Zahl ε ein $N(\varepsilon)$, so daß im Intervall $\langle a, b\rangle$

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6(b-a)}, \tag{13}$$

sobald $m > N(\varepsilon)$ und $n > N(\varepsilon)$. Wir wählen m oberhalb $N(\varepsilon)$, aber fest, und machen die Zerlegung

$$\mathfrak{Z}^{(m)}: \quad a = x_0^{(m)} < x_1^{(m)} < \ldots < x_{r_m}^{(m)} = b$$

[3]) Vgl. zum folgenden etwa v. Mangoldt-Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. III (8. Aufl., Leipzig 1944), S. 222—225.

so fein, daß, wenn man $x_{\varrho+1}^{(\mu)} - x_\varrho^{(\mu)} = i_\varrho^{(\mu)}$ setzt,

$$\sum_{\varrho=0}^{r_m-1} \sigma_m(x_\varrho^{(m)}, x_{\varrho+1}^{(m)})\, i_\varrho^{(m)} < \frac{\varepsilon}{6} \tag{14}$$

wird. Werden x' und x'' irgendwie im Intervall $\langle x_\varrho^{(m)}, x_{\varrho+1}^{(m)}\rangle$ gewählt, so ist

$$f_n(x') - f_n(x'') = [f_n(x') - f_m(x')] + [f_m(x') - f_m(x'')] + [f_m(x'') - f_n(x'')],$$

also nach (13) für $n > N(\varepsilon)$

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{6(b-a)} + \sigma_m(x_\varrho^{(m)}, x_{\varrho+1}^{(m)}) + \frac{\varepsilon}{6(b-a)};$$

daher ist auch für $n > m$ und $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, r_m - 1$

$$\sigma_n(x_\varrho^{(m)}, x_{\varrho+1}^{(m)}) \leqq \frac{2\varepsilon}{6(b-a)} + \sigma_m(x_\varrho^{(m)}, x_{\varrho+1}^{(m)})$$

und mit Rücksicht auf (14)

$$\sum_{\varrho=0}^{r_m-1} \sigma_n(x_\varrho^{(m)}, x_{\varrho+1}^{(m)})\, i_\varrho^{(m)} \leqq \frac{2\varepsilon}{6(b-a)} \sum_{\varrho=0}^{r_m-1} i_\varrho^{(m)} + \sum_{\varrho=0}^{r_m-1} \sigma_m(x_\varrho^{(m)}, x_{\varrho+1}^{(m)})\, i_\varrho^{(m)} \tag{15}$$

$$< \frac{2\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2},$$

sobald $n > m$ ist. Zu jeder der Nummern $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$ können wir eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z}^{(\mu)}: \qquad a = x_0^{(\mu)} < x_1^{(\mu)} < \ldots < x_{r_\mu}^{(\mu)} = b$$

derart finden, daß

$$\sum_{\varrho=0}^{r_\mu-1} \sigma_\mu(x_\varrho^{(\mu)}, x_{\varrho+1}^{(\mu)})\, i_\varrho^{(\mu)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Für die Zerlegung $\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z}^{(1)} + \mathfrak{Z}^{(2)} + \cdots + \mathfrak{Z}^{(m-1)} + \mathfrak{Z}^{(m)}$, bei der jeder der in einer der Zerlegungen $\mathfrak{Z}^{(1)}, \mathfrak{Z}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{Z}^{(m)}$ auftretenden Teilpunkte auch Teilpunkt ist und deren Teilpunkte der Reihe nach

$$a = x_0^* < x_1^* < \ldots < x_\varrho^* < x_{\varrho+1}^* < \ldots < x_{r^*}^* = b$$

seien, ist dann die Summe

$$\sum_{\varrho=0}^{r^*-1} \sigma_n(x_\varrho^*, x_{\varrho+1}^*)\, i_\varrho^* < \frac{\varepsilon}{2};$$

denn sie ist für $n = 1, 2, \ldots, m-1$ höchstens gleich der linken Seite von (16), für $n = m$ höchstens gleich der linken Seite von (14) und für $n > m$ höchstens gleich der linken Seite von (15).

Da jede der Funktionen $f_n(x)$ über das Intervall $\langle a, b\rangle$ R-integrierbar sein soll, ist jede einzelne Funktion in diesem Intervall beschränkt; es sei für $a \leqq x \leqq b$

$$|f_n(x)| < M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Da die Folge $\{f_n(x)\}$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig konvergiert, gibt es insbesondere eine Nummer n_0, so daß

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < 1$$

für $n > n_0$, also

$$|f_n(x)| < |f_{n_0}(x)| + 1 < M_{n_0} + 1.$$

Setzen wir

$$M = \operatorname{Max}\{M_1, M_2, \ldots, M_{n_0} + 1\},$$

so ist für $a \leqq x \leqq b$ und alle n

$$|f_n(x)| < M.$$

Für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$, bei welcher

$$\Delta_{\mathfrak{Z}} < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4\,r^*\,M},$$

ist dann nach Satz 5 für alle n

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho}\, i_\varrho < \varepsilon,$$

die Funktionen $f_n(x)$ sind also gleichgradig integrierbar.

Aus Satz 2 und 8 folgt unmittelbar der bekannte auf Weierstrass zurückgehende[4])

Satz 9. *Sind die Funktionen $f_n(x)$ über das Intervall $\langle a, b\rangle$ R-integrierbar und ist die Folge $\{f_n(x)\}$ in diesem Intervall gleichmäßig konvergent, so ist auch die Grenzfunktion*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

über das Intervall $\langle a, b\rangle$ R-integrierbar und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Eine leichte Verallgemeinerung gibt der im wesentlichen von Herrn Carslaw[5]) stammende

Satz 10. *Sind die Funktionen $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig beschränkt, ist jede einzelne Funktion $f_n(x)$ über dieses Intervall R-integrierbar, konvergiert die Folge $\{f_n(x)\}$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ und hat die Menge der etwa vorhandenen Punkte ungleichmäßiger Konvergenz den Jordanschen Inhalt Null, so ist auch die Grenzfunktion*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

über das Intervall $\langle a, b\rangle$ R-integrierbar und die Beziehung (1) gültig[6]).

[4]) Vgl. hierzu die Angaben in der Encyklopädie der math. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen Bd. II_3, zweite Hälfte, S. 1077.

[5]) H. S. Carslaw, Term-by-Term-Integration of infinite series. Math. Gazette **413**, (1927), S. 437—441. Herr Carslaw setzt ausdrücklich voraus, daß die Grenzfunktion $f(x)$ R-integrierbar sein soll. Der folgende Beweis zeigt, daß dies schon aus den übrigen Voraussetzungen folgt, also eine unnötige Voraussetzung ist.

[6]) Wegen des Begriffes der gleichmäßigen, bzw. ungleichmäßigen Konvergenz in einem Punkt vgl. die Encyklopädie der math. Wissenschaften Bd. II_3, zweite Hälfte, S. 1140—1141.

Beweis. Nach Satz 2 genügt es, festzustellen, daß die Funktionen $f_n(x)$ über das Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichgradig integrierbar sind.

Es sei ε eine beliebig gewählte positive Zahl und im Intervall $\langle a, b\rangle$

$$|f_n(x)| < M \quad \text{für alle } n.$$

Die Punkte ungleichmäßiger Konvergenz können wir in endlich viele, etwa k, einander nicht überdeckende Teilintervalle einschließen, deren Gesamtlänge kleiner als $\frac{\varepsilon}{8M}$ ist. Darnach bleiben höchstens $k+1$ Teilintervalle $\langle a_\varkappa, b_\varkappa\rangle$ vom Intervall $\langle a, b\rangle$ übrig [7]), in denen die Folge $\{f_n(x)\}$ gleichmäßig konvergiert, die Funktionen $f_n(x)$ nach Satz 8 also gleichgradig integrierbar sind. Es gibt also für jedes dieser Teilintervalle eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z}_\varkappa: \qquad a_\varkappa = x_{\varkappa 0} < x_{\varkappa 1} < \ldots < x_{\varkappa r_\varkappa} = b_\varkappa \quad (\varkappa = 0, 1, .., k),$$

so daß, wenn man $x_{\varkappa,\varrho+1} - x_{\varkappa\varrho} = i_{\varkappa\varrho}$ setzt,

$$\sum_{\varrho=0}^{r_\varkappa - 1} \sigma_n(x_{\varkappa\varrho}, x_{\varkappa,\varrho+1})\, i_{\varkappa\varrho} < \frac{\varepsilon}{4(k+1)}.$$

Die Aneinanderreihung dieser Zerlegungen gibt eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z}^*: \qquad a = x_0^* < x_1^* < \ldots\ldots < x_{r^*}^* = b,$$

bei welcher für alle n

$$\sum_{\varrho=0}^{r^*-1} \sigma_n(x_\varrho^*, x_{\varrho+1}^*)\, i_\varrho^* = \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{\varrho=0}^{r_\varkappa - 1} \sigma_n(x_{\varkappa\varrho}, x_{\varkappa,\varrho+1})\, i_{\varkappa\varrho} + \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \sigma_n(b_\varkappa, a_{\varkappa+1})(a_{\varkappa+1} - b_\varkappa)$$

$$< (k+1)\frac{\varepsilon}{4(k+1)} + 2M \sum_{\varkappa=0}^{k-1} (a_{\varkappa+1} - b_\varkappa) < \frac{\varepsilon}{4} + 2M\frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Da außerdem die Funktionen $f_n(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig beschränkt sind, sind sie nach Satz 5 über dieses Intervall gleichgradig integrierbar, wie behauptet wurde.

§ 4.

Ein Beispiel.

Es sei p_n die n-te Primzahl; wir setzen für $n = 1, 2, \ldots$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x = \frac{1}{p_n}, \frac{2}{p_n}, \ldots\ldots, \frac{p_n - 1}{p_n} \\ 0 \text{ sonst im Intervall } 0 \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

---

[7]) Ist a linker Endpunkt der die Punkte ungleichmäßiger Konvergenz überdeckenden Teilintervalle, so ist $a_0 = b_0 = a$ zu setzen; ist b rechter Endpunkt der diese Punkte überdeckenden Teilintervalle, so ist $a_k = b_k = b$ zu setzen.

Dann ist $f_n(x) = 0$ an den Stellen $x = \frac{\mu}{p_m}$, wo $m < n$, $\mu = 1, 2, .., p_m - 1$. Andernfalls wäre nämlich für eine der Zahlen $\nu = 1, 2, .., p_n - 1$

$$\frac{\mu}{p_m} = \frac{\nu}{p_n},$$

d. h. μ Teiler von νp_m; da $(\mu, p_m) = 1$, weil $1 \leqq \mu < p_m$, wäre also μ Teiler von ν, etwa $\mu\gamma = \nu$, also $p_n = \gamma p_m$, also, weil p_n Primzahl ist, $\gamma = 1$ oder $\gamma = p_n$; die erste Folgerung widerspricht der Tatsache, daß $p_m < p_n$ sein sollte, die zweite der Tatsache, daß $p_m > 1$ ist.

An ein und derselben Stelle x des Intervalles $\langle 0, 1\rangle$ ist also höchstens ein f_n von Null verschieden; von einer gewissen Nummer an sind dort alle f_n gleich Null. Also ist

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \equiv 0\ ^{8}).$$

Es sei nun

$$\mathfrak{Z}: \qquad 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_r = 1$$

irgend eine Zerlegung des Intervalles $\langle 0, 1\rangle$. Wählen wir n so groß, daß

$$\frac{1}{p_n} < \operatorname{Min}\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots,\ x_r - x_{r-1}\},$$

so fällt in jedes Teilintervall von $\mathfrak{Z}$ mindestens eine der Stellen $\frac{\nu}{p_n}$, wo $f_n = 1$ ist; also ist für $\varrho = 0, 1, .., r-1$ und alle hinreichend großen n bei dieser Zerlegung $\sigma_{n\varrho} = 1$ und damit auch

$$\sum_{\varrho=0}^{r-1} \sigma_{n\varrho} i_\varrho = 1.$$

Die Funktionen $f_n(x)$ sind also nicht gleichgradig integrierbar. Trotzdem gilt hier die Beziehung (1), in welcher jetzt alle auftretenden Integrale den Wert 0 haben und $a = 0$, $b = 1$ zu setzen ist. Die Bedingung der gleichgradigen Integrierbarkeit ist daher zwar eine hinreichende, aber nicht eine notwendige Voraussetzung für die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration.

Da die Funktionen $f_n(x)$ und die Grenzfunktion $f(x)$ im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ gleichmäßig beschränkt und R-integrierbar sind, ist in unserem Beispiel der Arzelàsche Satz anwendbar, um die Beziehung (1) zu sichern. Es erweist sich unser Satz 2 als ein echter Spezialfall des Arzelàschen Satzes.

---

[8]) Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$ konvergiert aber in keinem Teilintervall von $\langle 0, 1\rangle$ gleichmäßig.

(Eingegangen am 13. Oktober 1946.)

Neuer Beweis einer verschärften Minkowskischen Ungleichung für konvexe Körper[1]).

Von

A. Dinghas in Berlin.

1. In der vorliegenden Note wird ein neuer direkter Beweis einer Verschärfung der bekannten MINKOWSKISCHEN Ungleichung gegeben, welche den (mit 4π multiplizierten) mittleren Abstand M der Stützebenen eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ und seine Oberflächen O verbindet, die ich zum ersten Male in einer in den Monatsheften für Mathematik und Physik erschienenen Arbeit[2]) begründet habe. Die dort bewiesene Ungleichung lautet: *Zwischen den Größen M und O eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ besteht die Ungleichung*

$$M^2 - O^* O \geqq 0, \tag{1. 1}$$

und das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn $\mathfrak{K}$ ein Kappenkörper der Kugel oder eine Kugel ist. Dabei ist O^* die Oberfläche des dem $\mathfrak{K}$ zugeordneten Kappenkörpers $\mathfrak{K}^*$, also gewiß $> 4\pi$, falls $\mathfrak{K}$ mindestens einen Eckpunkt besitzt. Die Konstruktion von $\mathfrak{K}^*$ wird später auseinandergesetzt werden.

Die Methode, die hier zugrunde gelegt wird, ist die uralte Methode der Darstellung von O, M und O^* durch die Stützfunktionen p bzw. p^* der entsprechenden Körper. Es wird nämlich gezeigt, daß man zum Beweis dieser Ungleichung, die gewiß tiefer liegt als die klassische Ungleichung

$$M^2 - 4\pi O \geqq 0,$$

keine anderen Überlegungen braucht, als die klassischen Überlegungen aus dem Kreis des WIRTINGER-BLASCHKEschen Lemmas. Insbesondere wird gezeigt, daß die Bestimmung derjenigen Körper, für welche in (1. 1) das Gleichheitszeichen eintritt, sich ausschließlich mittels dieses Lemmas führen läßt, ohne daß es notwendig wird, auf das tieferliegende Verfahren von BOL zurückzugreifen.

Damit nun das BLASCHKE-WIRTINGERsche Lemma für beliebige konvexe Körper verwendbar bleibt, mußte ich es unter Voraussetzungen be-

[1]) Vorgetragen an der Universität Breslau am 11. 11. 1943.

[2]) Verschärfung der MINKOWSKISCHEN Ungleichungen für konvexe Körper. Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 51 (1943), S. 46—56. Vgl. auch Nachtrag: Bemerkung zu meiner Arbeit: Verschärfung der MINKOWSKISCHEN Ungleichungen für konvexe Körper. Ebenda. Bd. 51, 1943.

weisen, die von den Stützfunktionen des allgemeinsten konvexen Körpers erfüllt sind. Daß solche allgemeinen Ergebnisse leicht nur mit Hilfe des LEBESGUEschen Integrals zu erhalten sind, ist klar. Aus diesem Grunde schien mir wichtig, mindestens in großen Zügen einen Beweis des WIRTINGER-BLASCHKEschen Lemmas unter ganz allgemeinen Voraussetzungen zu geben, das nur klassische Sätze der LEBESGUEschen Integrationstheorie verwendet. Dieses Lemma, das hier „direkte" Methoden der Variationsrechnung ersetzt, zeigt deutlich, daß diese Methoden, falls sie zur Anwendung kommen, gegenüber den klassischen variationellen Methoden einen großen Vorzug besitzen, da sie mit denkbar wenigen Voraussetzungen über die betreffenden Funktionen auskommen.

Die Rechnungen wurden hier für den gewöhnlichen Raum durchgeführt, jedoch stößt die Übertragung auf höherdimensionale Räume auf keine prinzipielle Schwierigkeit.

2. **Das Wirtinger-Blaschkesche Lemma.** Wir betrachten eine auf der Einheitskugel $\mathfrak{S}$ eindeutige Funktion u der Länge φ und der komplementären Breite ϑ, die noch folgende Eigenschaften besitzt:

1. u besitzt einen beschränkten Differenzenquotienten nach ϑ, d. h. es gilt:

$$\left| \frac{u(\vartheta + \triangle\vartheta, \varphi) - u(\vartheta, \varphi)}{\triangle\vartheta} \right| \leqq M_1, \tag{2.1}$$

wobei M_1 eine Konstante ist.

2. In bezug auf φ ist immer

$$\left| \frac{u(\vartheta, \varphi + \triangle\varphi) - u(\vartheta, \varphi)}{\triangle\varphi} \right| \leqq M_2 \sin\vartheta, \tag{2.2}$$

wobei M_2 wieder eine Konstante bedeutet.

Wir wissen[3]), unter solchen Voraussetzungen existieren $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$[4]) fast überall und sind meßbare, d. h. im LEBESGUEschen Sinne integrierbare, Funktionen. Dasselbe gilt natürlich für die Quadrate dieser Funktionen, d. h. für $\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2$ bzw. $\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$. Eine solche Funktion nennen wir von der Klasse (A).

Das WIRTINGERsche Lemma besagt nun:

Ist $u = u(\vartheta, \varphi)$ *eine Funktion von der Klasse* (A) *und gilt noch*

$$\int u \, d\omega = 0, \tag{2.3}$$

so ist

$$\int \{2u^2 - \nabla(u, u)\} \, d\omega \leqq 0, \tag{2.4}$$

---

[3]) Vgl. z. B. HAUPT-AUMANN, Differential- und Integralrechnung, Bd. III, Berlin 1938, S. 132.

[4]) Wir schreiben später auch u_ϑ, u_φ an Stelle von $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

und das Gleichheitszeichen tritt nur dann ein, wenn u eine lineare Funktion der Kartesischen Koordinaten $x = \sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \sin\vartheta\sin\varphi$ und $z = \cos\vartheta$ auf $\mathfrak{S}$ ist.

Ferner bedeuten $d\omega$ das Flächenelement von $\mathfrak{S}$ und $\nabla(u,u)$ den ersten Beltramischen Differentialoperator, d. h.

$$\nabla(u,u) = \left(\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2,$$

und allgemein

$$\nabla(u,v) = \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\partial v}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}.$$

Schließlich sind die Integrationen immer über die ganze Kugel $\mathfrak{S}$ und im Lebesgueschen Sinne zu verstehen.

Zum Beweise von (2.4) verfahren wir so: Zuerst setzen wir

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\vartheta,\varphi)\,d\varphi \tag{2.5}$$

und schreiben

$$u = \bar{u} + v \tag{2.6}$$

mit $v = v(\vartheta,\varphi)$. Es ist dann $\int_0^{2\pi} v\,d\varphi = 0$. Wir bezeichnen jetzt allgemein die Größe $\int\{2f^2 - \nabla(f,f)\}\,d\omega$ durch $J(f)$. Bildet man dann $J(u)$, so findet man leicht die Gleichung

$$J(u) = J(\bar{u}) + J(v). \tag{2.7}$$

Denn die „gemischten" Integrale

$$\int\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vartheta}\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\,d\omega \text{ bzw. } \int\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\,d\omega \tag{2.8}$$

sind gleich Null[5]).

Nun ist

$$J(v) = \int\{2v^2 - v_\vartheta^2 - (1+\cot^2\vartheta)\,v_\varphi^2\}\,d\omega = \int(v^2 - v_\varphi^2)(1+\cot^2\vartheta)\,d\omega + \int(v^2 - v^2\cot^2\vartheta - v_\vartheta^2)\,d\omega,$$

und wegen $d\omega = \sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta$,

$$\int(v^2 - v^2\cot^2\vartheta - v_\vartheta^2)\,d\omega + \int(v_\vartheta - v\cot\vartheta)^2\,d\omega =$$

$$= \int\{v^2\sin\vartheta - 2v\,v_\vartheta\cos\vartheta\}\,d\vartheta\,d\varphi = -\int\frac{\partial}{\partial\vartheta}(v^2\cos\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta = 0,$$

$$J(v) = \int(v^2 - v_\varphi^2)(1+\cot^2\vartheta)\,d\omega - \int(v_\vartheta - v\cot\vartheta)^2\,d\omega. \tag{2.9}$$

---

[5]) Dies folgt unmittelbar aus $\int v\,d\varphi = 0$, wenn man die beiden Integrale in zwei einfachere zerlegt und berücksichtigt, daß $\bar{u}$ nur von ϑ abhängt. Die Zerlegung ist wegen (2.1), (2.2) zulässig.

Wir setzen jetzt $\bar{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = d$ und schreiben $\bar{u} = \bar{u}^* + d$. Wegen (2.4) wird dann

$$\int \bar{u}^* \, d\omega = -4\pi d \tag{2.10}$$

und wir erhalten durch Einsetzen in $J(\bar{u})$,

$$J(\bar{u}) = -8\pi d^2 + \int \left\{2\,\bar{u}^{*2} - \bar{u}_\vartheta^{*2}\right\} d\omega. \tag{2.11}$$

Da nun, wie man leicht nachrechnet,

$$\int \left(2\,\bar{u}^{*2} - \bar{u}_\vartheta^{*2}\right) d\omega + \int (\bar{u}_\vartheta^* + \bar{u}^* \operatorname{tg}\vartheta)^2 \, d\omega = \int \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\bar{u}^{2*} \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\right) d\vartheta \, d\varphi$$

ist und $\bar{u}^*$ in der Nähe von $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ein $o(\cos\vartheta)$[6]) wird, so ist die rechte Seite dieser Gleichung gleich Null und wir erhalten die Schlußgleichung

$$J(u) = \int (v^2 - v_\varphi^2)(1 + \cot^2\vartheta)\, d\omega - 4\pi d^2 - \\ - \int (v_\vartheta - v\cot\vartheta)^2 \, d\omega - \int (\bar{u}_\vartheta^* + \bar{u}^* \operatorname{tg}\vartheta)^2 \, d\omega. \tag{2.12}$$

Dadurch ist die Behauptung auf den Beweis der Ungleichung

$$J_0(v) = \int_0^{2\pi} (v^2 - v_\varphi^2)\, d\varphi \leqq 0 \tag{2.13}$$

zurückgeführt worden, unter der Voraussetzung

$$\int_0^{2\pi} v \, d\varphi = 0, \tag{2.14}$$

was eine wesentlich leichtere Aufgabe ist.

3. **Fortsetzung und Ende.** Zuerst beachten wir, daß $v(\varphi) + v(\pi + \varphi)$ zwischen 0 und π mindestens eine Nullstelle α hat, da ja wegen (2.14)

$$\int_0^{\pi} \{v(\varphi) + v(\pi + \varphi)\}\, d\varphi = 0$$

ist. Setzt man $v(\alpha) = a$ und $\varphi - \alpha = x$, so ist, wie man leicht nachprüft,

$$J_0(v - a\cos x) = J_0(v), \tag{3.1}$$

und es genügt (2.13) für die Funktion $y = v - a\cos x$ zu beweisen.

---

[6]) Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung. Es ist z. B. $\bar{u}^* = -\int_\vartheta^{\frac{\pi}{2}} \bar{u}'^* \, d\vartheta$, also $\bar{u}^{*2} \leqq \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \int_\vartheta^{\frac{\pi}{2}} \bar{u}^{*2} \, d\vartheta$. Das Integral ist hier ein $o(1)$ und $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ ein $o(\cos\vartheta)$.

Für diese gilt aber $y(0) = y(\pi) = 0$ und man erhält aus der Identität

$$(y^2 - y'^2) + (y' - y\cot x)^2 = -\frac{d}{dx}(y^2 \cot x),$$

mit Rücksicht darauf, daß y in der Nähe von $x = 0$ bzw. π ein $o(x)$ bzw. $o(\pi - x)$ ist,

$$J_0(y) = -\int_0^{2\pi} (y' - y\cot x)^2\, dx \leqq 0. \tag{3.2}$$

Daraus folgt wegen (3.1) die Behauptung (2.13), also auch die Behauptung (2.4). Gleichheit gilt hier nur falls $y = C \sin x$ ist, also ist (2.13) nur dann gleich Null, wenn v von der Form $A\cos\varphi + B\sin\varphi$ mit den Konstanten A und B ist.

Wann ist $J(u) = 0$? Wie aus (2.12) folgt, muß 1. $d = 0$ sein, 2. $v_\vartheta - v\cot\vartheta = 0$, d. h. $v = F(\varphi)\sin\vartheta$, wobei $F(\varphi)$ nur von φ abhängt, 3. $J_0(v) = 0$, d. h. $F(\varphi) = A\cos\varphi + B\sin\vartheta$, und 4. wegen $\bar{u} = \bar{u}^*$ und $\bar{u}^*_\vartheta + \bar{u}^* \operatorname{tg}\vartheta = 0$, $\bar{u} = C\sin\vartheta$ mit konstantem C.

Fast man alle diese Bedingungen zusammen, so erhält man aus (2.6)

$$u = A\sin\vartheta\cos\varphi + B\sin\vartheta\sin\varphi + C\cos\vartheta,$$

wie es die Behauptung verlangt.

4. **Der zugeordnete Kappenkörper $\mathfrak{K}^*$.** Damit der Leser alles beisammen haben möge, so wiederholen wir hier den fundamentalen Begriff des zugeordneten Kappenkörpers $\mathfrak{K}^*$, so wie ich ihn in einer vorherigen Arbeit eingeführt habe[7]).

Ist ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ im dreidimensionalen Raum gegeben, so nennen wir den Punkt $\mathfrak{p}$ einen Eckpunkt von $\mathfrak{K}$, wenn es mindestens drei Stützebenen durch $\mathfrak{p}$ gibt, mit linear unabhängigen Normalrichtungen[8]). Wir definieren als Projektionsraum von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{p}$ denjenigen konvexen Kegel $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, den man erhält, wenn man $\mathfrak{p}$ mit allen inneren Punkten von $\mathfrak{K}$ verbindet und dann die so erhaltene Strahlenmenge betrachtet. Die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ sei nun $\mathfrak{R}'_\mathfrak{p}$. Dann wird der Durchschnitt $\overline{\mathfrak{R}'_\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{R}'_\mathfrak{p}$ mit der Einheitskugel um $\mathfrak{p}$ der Projektionssektor von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{p}$ genannt. $\overline{\mathfrak{R}'_\mathfrak{p}}$ ist ein konvexer Körper. Nachdem wir den Projektionssektor $\overline{\mathfrak{R}'_\mathfrak{p}}$ definiert haben, definieren wir noch den Normalsektor $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ im Punkte $\mathfrak{p}$ folgendermaßen: Wir bezeichnen als Eckstützebene durch $\mathfrak{p}$ an $\mathfrak{K}$ jede Stützebene, deren Bedingung sich auf irgendeine Weise in eine Form $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 \leqq 0$

---

[7]) Vgl. auch meine Arbeit: Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Körper mit Ecken. Math. Zeitschr. **47**. 1942, S. 669—675. Der Inhalt dieser Nummer geht, was die Begriffe Normalsektor und Normalkegel anbetrifft, auf MINKOWSKI zurück.

[8]) D. h., drei Stützebenen durch $\mathfrak{p}$, deren Normalrichtungen nicht in einer Ebene liegen.

bringen läßt, so daß $\varphi_1 \leqq 0$, $\varphi_2 \leqq 0$, $\varphi_3 \leqq 0$ die Bedingungen dreier Stützebenen an $\mathfrak{K}$ mit unabhängigen Normalrichtungen und c_1, c_2, c_3 positive Konstanten sind.

Sind nun x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Eckpunktes $\mathfrak{p}$ in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so denken wir uns zu jeder Bedingung

$$u(x-x_0)+v(y-y_0)+w(z-z_0) \leqq 0 \tag{4.1}$$

einer Stützebene durch $\mathfrak{p}$ den Punkt mit den Koordinaten u, v, w und nehmen nach dem Vorgang Minkowskis noch den Nullpunkt dazu. Die so definierte, aus lauter Strahlen vom Nullpunkt O aus bestehende Punktmenge, ist abgeschlossen, enthält den Nullpunkt und drei nicht mit ihm in einer Ebene liegende Punkte.

Der Durchschnitt dieses Bereiches mit der Kugel $\mathfrak{S}$

$$x^2+y^2+z^2 \leqq 1 \tag{4.2}$$

ist eine abgeschlossene im Endlichen liegende konvexe Punktmenge und wird nach Minkowski der Normalsektor $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ des Eckpunktes $\mathfrak{p}$ genannt. $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ besteht aus allen Radien von $\mathfrak{S}$ von O zum Punkt $Q(\xi, \eta, \zeta)$ mit $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$, welche zugleich äußere Normalrichtungen von Stützebenen durch $\mathfrak{p}$ an $\mathfrak{K}$ sind.

Nachdem wir nun den Normalsektor $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ definiert haben, führen wir jetzt den Begriff des kleinsten Rotationskegels $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$ ein, der den Projektionsraum $\mathfrak{R}'_{\mathfrak{p}}$ enthält. $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$ kann folgendermaßen konstruiert werden:

Es sei $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ derjenige Teil des Randes von $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$, der auf der Einheitskugel $\mathfrak{S}$ liegt. $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ ist dann in dem Sinne konvex, als es nämlich mit zwei Punkten $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ alle Punkte eines Großkreisbogens von $\mathfrak{S}$ enthält, der durch $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ geht. Da $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ innerhalb einer Halbkugel liegt, so sind diese Großkreisbogen eindeutig bestimmt. Es sei nun $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ der größte Kreis, der in $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ Platz findet. $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ wird höchstens Randpunkte mit dem Rand von $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ gemeinsam haben. Der Radius von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ möge auf der Oberfläche von $\mathfrak{S}$ gemessen gleich ψ sein. ψ ist also gleich dem Winkel, den der Radius durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ mit dem Radius durch einen beliebigen Randpunkt von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ bildet. Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{p}'$ einen Randpunkt von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$. Diejenigen Stützebenen durch $\mathfrak{p}$ mit Normalrichtungen $O\mathfrak{p}'$ umhüllen nun einen Rotationskegel $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$, den wir den kleinsten Rotationskegel in $\mathfrak{p}$ nennen werden, der den Projektionsraum in $\mathfrak{p}$ enthält. Die „Öffnung“ ψ von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ ist wegen der Definition von $\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$ eindeutig bestimmt, und zwar ausschließlich durch den Projektionsraum in $\mathfrak{p}$.

Um nun den zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Kappenkörper $\mathfrak{K}^*$ zu konstruieren, betrachten wir wieder die Kugel $\mathfrak{S}$ und konstruieren zu jedem Eckpunkte $\mathfrak{p}$ den zugehörigen Normalsektor $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$. Die inneren Punkte von $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ entsprechen den Normalen der Eckstützebene durch $\mathfrak{p}$. Da eine

solche Ebene den konvexen Körper nur in $\mathfrak{p}$ trifft, kann sie niemals durch einen zweiten Eckpunkt gehen. Die Normalsektoren $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ also (falls es mehrere Eckpunkte gibt) haben niemals innere Punkte gemeinsam. Die Ecken $\mathfrak{p}$ sind also höchstens abzählbar. Zu jedem $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ konstruieren wir nun den größten Kreis $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$, der in dem sphärischen Randstück von $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ Platz findet. Nachdem wir nun diese Kreise auf $\mathfrak{S}$ festgelegt haben, bedecken wir nach dem bekannten Vorgang die von den $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ bestimmten sphärischen Kalotten mit den Kappen, indem wir in jedem Randpunkt von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ die Tangentenebene an $\mathfrak{S}$ legen, und die dadurch bestimmten Kegel hinzunehmen. Wie aus der Konstruktion hervorgeht, sind die Kappen nichts anderes, als die den zugehörigen Punkten $\mathfrak{p}$ entsprechenden kleinsten Rotationskegel, und zwar so auf $\mathfrak{S}$ angesetzt, daß die Erzeugenden dieser Kegel Tangenten von $\mathfrak{S}$ sind.

5. **Beweis der Ungleichung $M^2 - O^* O \geqq 0$.** Nach allen diesen Vorbereitungen sind wir jetzt imstande, die Ungleichung (1.1) nebst dem Einzigkeitsfalle (d. h. den Fall, wo das Gleichheitszeichen eintritt) verhältnismäßig leicht zu beweisen. Dazu setzen wir in (2.4)

$$u = \frac{p}{M} - \frac{p^*}{M^*}, \tag{5.1}$$

und bemerken, daß diese Funktion alle Voraussetzungen des Wirtinger-Blaschkeschen Lemmas erfüllt. Aus der Fundamentalungleichung (2.4) erhalten wir dann durch Entwicklung und Berücksichtigung der Oberflächenformeln für $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}^*$

$$\frac{O}{M^2} - 2\frac{Q}{M M^*} + \frac{O^*}{M^{*2}} \leqq 0, \tag{5.2}$$

mit

$$\begin{aligned} O &= \int \{p^2 - \tfrac{1}{2} \nabla (p, p)\}\, d\omega, \\ O^* &= \int \{p^{*2} - \tfrac{1}{2} \nabla (p^*, p^*)\}\, d\omega, \end{aligned} \tag{5.3}$$

und

$$Q = \int \{p\, p^* - \tfrac{1}{2} \nabla (p, p^*)\}\, d\omega. \tag{5.4}$$

Für die zwei Formeln (5.3) werden wir annehmen, daß sie entsprechend die Oberflächen von $\mathfrak{K}$ bzw. von $\mathfrak{K}^*$ darstellen [9]).

---

[9]) Ursprünglich war bei der Abfassung dieser Arbeit noch der ausführliche und strenge Beweis dieser Tatsache geplant. Die später einsetzenden Lebensschwierigkeiten und der Mangel an einschlägiger Literatur zwangen mich zur Aufgabe meines Vorhabens. An sich können die Gleichungen (5.3), da diese für stetig gekrümmte Körper gelten, auf beliebige übertragen werden, mittels des bekannten Minkowskischen Satzes über die Approximation beliebiger konvexer Kappen durch stetig gekrümmte, wenn man noch einige fundamentale Sätze der Lebesgueschen Integraltheorie zugrunde legt.

Soll dann aus (5.2) die Ungleichung (1.1) folgen, so liegt die ganze Schwierigkeit darin, die Gleichung $Q = M$ zu beweisen.

Zum Nachweis dieser Tatsache müssen wir sehr kunstvoll vorgehen. Zuerst ist für jeden Punkt von $\mathfrak{S}$ außerhalb einer Kalotte C $p^* = 1$. Der Wert des Integranden ist also gleich p. Wenn wir nun zeigen können, daß für jede Kalotte C

$$\int_C \{p\,p^* - \tfrac{1}{2} \nabla(p, p^*)\}\, d\omega = \int_C p\, d\omega \tag{5.5}$$

ist, so sind wir fertig, da ja (5.3) (als LEBESGUEsches Integral) gleich der Summe aller dieser (höchstens abzählbar vielen) Integrale und des Integrals außerhalb aller Kalotten C ist. Um dies zu zeigen, müssen wir ein wenig zur Geometrie zurückgreifen.

Wir betrachten einen bestimmten Eckpunkt T von $\mathfrak{K}$, den entsprechenden Eckpunkt T^* von $\mathfrak{K}^*$ und zwei parallele Stützebenen E bzw. E^*, die durch T bzw. T^* gehen, wie dies in der Figur 1 gezeigt wird. Dort sind wegen der Übersichtlichkeit die beiden Anfangspunkte O bzw. O^* (wir nehmen O innerhalb $\mathfrak{K}$), sowie die Einheitskugel $\mathfrak{S}$, die zur Bestimmung von p bzw. p^* dient, getrennt gezeichnet. Man könnte sich aber den Mittelpunkt A von $\mathfrak{S}$ ebensogut in O^* denken. Der Punkt P von $\mathfrak{S}$, dessen Funktionen p und p^* sind, bestimmt jetzt zusammen mit dem Nord- bzw. Südpol von $\mathfrak{S}$ eine Ebene $\mathfrak{x}$. Die durch T parallele TR zu $\mathfrak{x}$ und die darauf senkrechte TS bestimmen auf E ein Achsenkreuz RTS, und wir werden zeigen, daß p_ϑ bzw. $\frac{p_\varphi}{\sin\vartheta}$ entsprechend gleich TL bzw. TM, d. h. gleich den Komponenten des

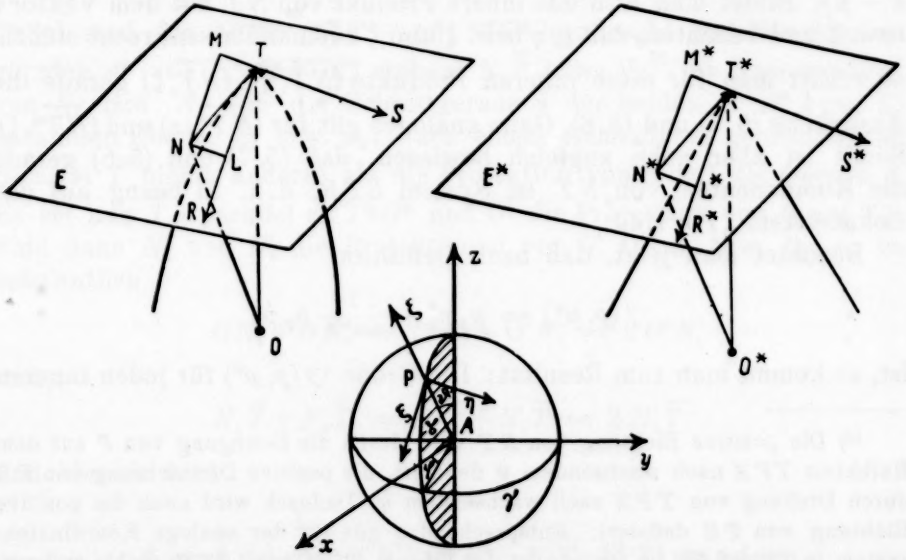

Fig. 1.

Vektors $\overrightarrow{NT}$ sind[10]). Entsprechendes gilt für p_ϑ^* bzw. $\frac{p_\varphi^*}{\sin\vartheta}$. Der Beweis ist einfach. Es seien nämlich x', y', z' die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{OT}$, $x' = a\sin\vartheta'\cos\varphi'$, $y' = a\sin\vartheta'\sin\varphi'$, $z' = a\cos\vartheta'$, und x, y, z, $x = \sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \sin\vartheta\sin\varphi$, und $z = \cos\vartheta$ die Koordinaten von P. Dann ist

$$p = a\{\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')\}, \tag{5.6}$$

also

$$p_\vartheta = a\{-\sin\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')\}, \tag{5.7}$$

und

$$\frac{p_\varphi}{\sin\vartheta} = -a\sin\vartheta'\sin(\varphi-\varphi'). \tag{5.8}$$

Nun rechnen wir die Komponenten der Einheitsvektoren ξ, η, ζ aus, die man mittels des senkrechten Vektors auf AP in der Ebene $\mathfrak{x}$ nach der Richtung der wachsenden ϑ und des Tangentenvektors auf den Parallelkreis durch P nach den wachsenden φ. Für diese Vektoren finden wir die Komponenten

	α	β	γ
ξ :	$\sin\vartheta\cos\varphi$,	$\sin\vartheta\sin\varphi$,	$\cos\vartheta$
η :	$\cos\vartheta\cos\varphi$,	$\cos\vartheta\sin\varphi$,	$-\sin\vartheta$
ζ :	$-\sin\varphi$,	$\cos\varphi$,	0.

Die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{NT}$ sind nun gleich $x' - p\alpha$, $y' - p\beta$, $z' - p\gamma$. Bildet man also das innere Produkt von $\overrightarrow{NT}$ mit dem Vektor η bzw. ζ und beachtet, daß ξ, η bzw. ξ und ζ zueinander senkrecht stehen, so erhält man für diese inneren Produkte $(\overrightarrow{NT}, \eta)$, $(\overrightarrow{NT}, \zeta)$ gerade die Ausdrücke (5.7) und (5.8). Ganz analoges gilt für $(\overrightarrow{NT}^*, \eta)$ und $(\overrightarrow{NT}^*, \zeta)$. Somit ist aber auch zugleich bewiesen, daß (5.7) und (5.8) gerade die Komponenten von NT im System STR, d. h. in bezug auf das Lokalsystem $\zeta P\eta$ sind.

Beachtet man jetzt, daß nach Definition

$$\nabla(p, p^*) = p_\vartheta p_\vartheta^* + \frac{1}{\sin^2\vartheta} p_\varphi p_\varphi^*$$

ist, so kommt man zum Resultat: Die Größe $\nabla(p, p^*)$ für jeden inneren

---

[10]) Die positive Richtung von RT wird durch die Bewegung von P auf dem Halbkreis YPZ nach wachsendem ϑ definiert, die positive Drehrichtung von TR durch Drehung von YPZ nach wachsendem φ. Dadurch wird auch die positive Richtung von TS definiert. Entsprechendes gilt für das analoge Koordinatensystem in T^* auf E^*. Im Grunde ist das System STR (bzw. ST^*R) nichts anderes, als das „lokale" System $\zeta P\eta$ transportiert nach T (bzw. T^*).

Punkt P der Kalotte C ist gleich dem inneren Produkt der zwei Vektoren $\overrightarrow{NT}$ und $\overrightarrow{N^*T^*}$. Für die Größe $\int\{p\,p^* - \frac{1}{2}\bigtriangledown(p, p^*)\}\,d\omega$ haben wir also folgenden geometrischen Ausdruck gefunden: Es ist

$$(5.9)\quad J = \int_C \{p\,p^* - \tfrac{1}{2}\bigtriangledown(p, p^*)\}\,d\omega = \int\{ON \cdot O^*N^* - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{NT}, \overrightarrow{N^*T^*})\}\,d\omega.$$

6. **Fortsetzung. Der Einzigkeitsfall.** Zur Ausrechnung von (5.9) gehen wir bei der Integration so vor: Aus der geometrischen Bedeutung rechts folgt zuerst, daß wir ohne weiteres an Stelle von ϑ, φ die Koordinaten α und β einführen können, wobei wir O^*T^* die Rolle der z-Achse übernehmen lassen. Dann führen wir die Integration so, indem wir nämlich (bei festem β!) zwei in bezug auf O^*T^* symmetrische Stützebenen betrachten, wie dies in der Figur deutlich gezeigt wird. (Die entsprechende Figur für $\mathfrak{R}$ kann leicht vom Leser gezeichnet werden.) Mit dieser Verabredung wird:

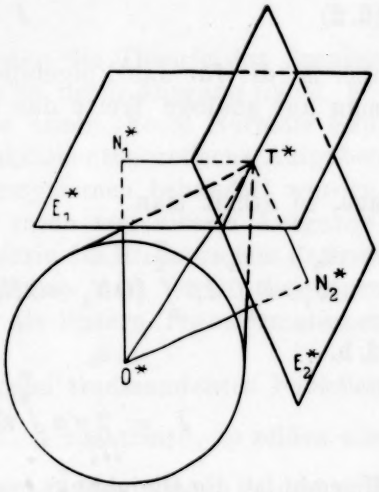

Fig. 2.

$$(6.1)\quad J = \int_0^{\pi} d\beta \int_0^{\frac{\psi}{2}} \{(ON_1 + ON_2)\,O^*N_1^* - \tfrac{1}{2}(N_1\overline{T} + N_2\overline{T})\,N_1^*T^*\}\sin\alpha\,d\alpha.$$

Dabei sind (da O^*T^*, $N_1^*T^*$ und $N_2^*T^*$ senkrecht auf der Schnittgeraden δ^* von E_1^* bzw. E_2^* stehen) $N_1\overline{T}$ bzw. $N_2\overline{T}$ die Entfernungen von N_1 bzw. N_2 von der Schnittgerade δ der beiden zu E_1^* bzw. E_2^* parallelen Ebenen E_1 bzw. E_2. Nach einem elementaren geometrischen Satz ist $\overline{T}$ nichts anderes als die Projektion von O auf die Gerade δ. Es sei nun $\overline{T}\varrho$ parallel zu T^*O^* und O' die Projektion von O auf $\overline{T}S$. Sind dann N_1' und N_2' die Projektionen von O' auf E_1 bzw. E_2, so ist bekanntlich

$$ON_1 + ON_2 = O'N_1' + O'N_2 = 2\,O'N_1'$$

und

$$N_1'\overline{T} + N_2'\overline{T} = N_1'\overline{T} + N_2'\overline{T} = 2\,N_1'\overline{T}$$

und hiermit wird

$$J = \int_0^{\pi} d\beta \int_0^{\frac{\psi}{2}} \{2\,O'N_1' \cdot O^*N_1^* - N_1'\overline{T} \cdot N_1^*T\}\sin\alpha\,d\alpha.$$

Setzt man jetzt für den Augenblick $O'\overline{T} = a$ und $O^*T^* = a^*$, so wird

$$J = \pi a a^* \int_0^{\frac{\psi}{2}} \{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\} \sin\alpha \, d\alpha,$$

oder

$$J = \pi a a^* \sin^2\frac{\psi}{2} \cos\frac{\psi}{2}.$$

Wegen $a^* \cos\frac{\psi}{2} = 1$ wird schließlich

$$J = \pi a \sin^2\frac{\psi}{2}. \tag{6.2}$$

Das ist die für das Folgende entscheidende Gleichung. Denn rechnet man auf analoge Weise das Integral

$$J_1 = \int_C p \, d\omega$$

aus, so erhält man

$$J_1 = \int_0^{\pi} d\beta \int_0^{\frac{\psi}{2}} \{ON_1 + ON_2\} \sin\alpha \, d\alpha = 2 \int_0^{\pi} d\beta \int_0^{\frac{\psi}{2}} O'N_1' \sin\alpha \, d\alpha,$$

d. h.

$$J_1 = 2\pi a \int_0^{\frac{\psi}{2}} \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha = \pi a \sin^2\frac{\psi}{2}.$$

Hiermit ist die Gleichung $J = J_1$ bewiesen und zugleich die Richtigkeit von (1.1). Denn setzt man in (5.4) $p = p^*$ ein, so wird nach dem vorherigen Verfahren $O^* = M^*$ und infolgedessen nach (5.2) $M^2 - O^* O \geqq 0$. Daß das Gleichheitszeichen hier nur im Falle, wo $\mathfrak{K}$ homothetisch zu $\mathfrak{K}^*$ ist, eintritt, folgt unmittelbar aus dem Blaschke-Wirtingerschen Lemma.

(Eingegangen am 29. Juni 1946.)

Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume.

Von

G. Köthe in Mainz.

Zu den klassischen Arbeiten, von denen die Theorie der linearen Gleichungen mit unendlich vielen Variablen ihren Ausgang nahm, gehört die „Thèse" von É. Borel (Annales scient. Ecole Normale Sup. (3) **12** (1895), S. 9—55), in der einige funktionentheoretische Aufgaben in der Form von unendlichen Gleichungssystemen behandelt werden. Die spätere Entwicklung entfernte sich rasch von diesem Ausgangspunkt; in den Vordergrund traten die Theorie des Hilbertschen Raumes und allgemeiner die der metrischen Räume und damit diejenigen Gleichungssysteme, deren Matrizen sich als lineare Transformationen solcher Räume deuten lassen.

Faßt man die Koeffizienten einer ganzen transzendenten Funktion $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ zu einem Vektor $\{a_0, a_1, \ldots\}$ zusammen, so bilden alle diese Vektoren zwar einen linearen Raum π, aber einen, in dem sich keine lineare Metrik anbietet.

Erst M. Eidelheit[1]) hat 1936 einen allgemeinen Satz abgeleitet (vgl. § 7 Satz 1), der es gestattet, die funktionentheoretischen Aufgaben als Spezialfälle zu lösen. Dieser Satz beruht auf einer Verallgemeinerung der Theorie der Banachräume zu einer Theorie der Räume vom Typus (B_0), die von S. Mazur und W. Orlicz gegeben wurde, jedoch meines Wissens nie veröffentlicht worden ist.

Ohne Kenntnis der Arbeit von Eidelheit hat G. Polya 1939[2]) ein hinreichendes Kriterium für die Lösbarkeit von unendlichen Gleichungssystemen angegeben, das so allgemein ist, daß die funktionentheoretischen Aufgaben in befriedigendem Umfang damit gelöst werden können. Seine Methode ist elementar und benutzt nichts aus der Theorie der linearen Räume.

Im Verlauf der Untersuchungen von O. Toeplitz und mir[3]) über die vollkommenen linearen Räume ergab sich bald, daß π und die in

---

[1]) Studia Mathematica **6** (1936), S. 139—148. Wir zitieren diese Arbeit als E.

[2]) Comment. Math. Helvet. **11** (1939), S. 234—252.

[3]) Die folgenden Arbeiten werden im Text öfter zitiert werden: KT, G. Köthe u. O. Toeplitz, Journ. f. reine angew. Math. **171** (1934), S. 193—226; K 1, G. Köthe,

§ 1 erklärten funktionentheoretischen Räume ϱ, π_r und ϱ_r einfache Beispiele von vollkommenen Räumen sind. O. Toeplitz hat dann 1937 mit Mitteln, die teils der Theorie der vollkommenen Räume, teils der Funktionentheorie angehören, eine bisher nicht veröffentlichte Untersuchung über die angegebenen Räume angestellt, die bis zu den wichtigsten Eigenschaften der Matrix $\mathfrak{W}$ von § 7 führte. Dieser Untersuchung verdanke ich wesentliche Anregungen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Stufenräumen und ihren dualen Räumen. Sind endlich oder abzählbar viele Stellen $\mathfrak{a}^{(k)} = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots\}$ gegeben, so gibt es einen kleinsten vollkommenen Raum, der diese Stellen enthält. Wir bezeichnen ihn als den durch die Stufen $\mathfrak{a}^{(k)}$ erzeugten Stufenraum $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots}$. Die dualen Räume dazu heißen gestufte Räume. Nimmt man z. B. $\mathfrak{a}^{(k)} = \{1, k, k^2, k^3, \ldots\}$, $k = 1, 2, \ldots$, als Stufen, so bekommen wir als Stufenraum den Raum ϱ der Potenzreihen um 0 und π als den dazu dualen gestuften Raum. Auch die Räume π_r und ϱ_r fallen darunter.

Der von der Stelle $\mathfrak{o} = \{0, 0, \ldots\}$ erzeugte Stufenraum ist offenbar der Raum φ aller finiten Stellen, $\mathfrak{e} = \{1, 1, \ldots\}$ erzeugt als Stufenraum σ_∞, den Raum aller beschränkten Folgen. Eine beliebige Stelle $\mathfrak{a}$ erzeugt einen vollkommenen Raum, der zu σ_∞ diagonaltransformiert ist und eventuell noch φ als direkten Summanden dazu hat. Der durch die Stufen $\mathfrak{a}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, erzeugte Stufenraum $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)}}$ läßt sich auch durch die eine Stufe $\mathfrak{b}^{(n)} = \{\sum_1^n |a_1^{(i)}|, \sum_1^n |a_2^{(i)}|, \ldots\}$ erzeugen, der allgemeine Stufenraum $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots}$ ist die Vereinigungsmenge der $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$.

Aus dieser speziellen Struktur lassen sich leicht eine Reihe von Aussagen ableiten (vgl. §§ 1 und 2). So ist in jedem Stufenraum jede beschränkte Menge schwach kompakt, in den gestuften Räumen fallen schwache und starke Konvergenz zusammen. Etwas schwieriger ist die Frage, wann in den Stufenräumen schwache und starke Konvergenz zusammenfallen. § 2 Satz 4 gibt die Antwort. Eine daran anschließende Frage ist der Anlaß zur Einführung der t-Konvergenz in beliebigen vollkommenen Räumen (§ 3). Bei Eidelheit wird diese Konvergenz als starke Konvergenz bezeichnet, wogegen unsere starke Konvergenz etwas schwächer ist. Wir geben die genaue Bedingung an, wann die t-Konvergenz mit der schwachen Konvergenz in den Stufenräumen übereinstimmt (§ 3 Satz 2).

In § 4 gelingt die Übertragung des von mir in K 3 für σ_∞ bewiesenen Satzes, daß jede schwach abgeschlossene Menge aus σ_∞ bereits alle ihre schwachen Häufungsstellen enthält, auf beliebige Stufen-

---

Math. Annalen **114** (1937), S. 91—125; K 2, G. Köthe, Journ. f. reine angew. Math **178** (1938), S. 193—213; K 3, G. Köthe, Monatshefte Math. Phys. **47** (1939). S. 224—233; K 4, G. Köthe, Math. Annalen **116** (1939), S. 719—732; K 5, G. Köthe. Die Quotientenräume eines linearen vollkommenen Raumes, Math. Zeitschrift **51** (1947), 17—35.

räume (§ 4 Satz 4). § 5 beschäftigt sich mit den Quotientenräumen λ/α der orthogonalabgeschlossenen Teilräume α eines Stufenraumes λ. Zuerst werden die verschiedenen möglichen Beschränktheitsbegriffe für die Mengen aus λ/α erörtert und dann bewiesen, daß sie für Stufenräume alle zusammenfallen. Weitere Resultate, die über die für beliebige vollkommene Räume gültigen Sätze aus K 5 hinausgehen, sind die Vollständigkeit jedes Quotientenraumes λ/α (§ 4 Satz 5) und die Existenz einer schwach konvergenten Repräsentantenfolge zu jeder schwach konvergenten Folge im Quotientenraum (§ 4 Satz 7).

In § 6 werden die gewonnenen Ergebnisse angewendet, um die homomorphen Abbildungen von zwei Stufenräumen oder zwei gestuften Räumen ineinander zu untersuchen. Der Hauptsatz dieses Paragraphen gibt zwölf Eigenschaften an, die sämtlich untereinander äquivalent sind und eine lineare Abbildung als Homomorphismus charakterisieren.

In § 7 wird als Beispiel der Satz abgeleitet, daß es eine ganze transzendente Funktion gibt, die an abzählbar vielen Stellen vorgegebene Werte annimmt, den Eidelheit auf andere Weise aus seinem Satz erhält. Dieser Satz (§ 7 Satz 1) und auch die Polyaschen Ergebnisse werden aus den Resultaten von § 6 neu hergeleitet.

Ein wichtiges Resultat im Zusammenhang mit dem Reziprokentheorem, das E. Hagemann in einer Arbeit [4]) behandelt hat, ergibt sich nebenbei. Im Raum ϱ wird ein linearer orthogonal-abgeschlossener Teilraum angegeben, zu dem es keinen Komplementärraum gibt. Daraus läßt sich eine homomorphe Abbildung des vollkommenen Raumes $\varrho + \varphi$ in sich konstruieren, deren Matrix keine linke Reziproke besitzt. Damit ist gezeigt, daß das von O. Toeplitz [5]) im Hilbertschen Raum angegebene Reziprokentheorem sich nicht auf alle vollkommenen Räume übertragen läßt.

§ 1.

Die Stufenräume und ihre dualen Räume.

Geht man von einem linearen Koordinatenraum λ aus, bildet den zu λ dualen Raum λ^*, so sind λ^* und der dazu duale Raum λ^{**} nach KT § 2 vollkommen. λ^{**} ist die vollkommene Hülle von λ, d. h. der kleinste λ umfassende vollkommene Raum.

Besteht λ aus den (komplexen) Vielfachen der Stelle $\mathfrak{e} = \{1, 1, \ldots\}$, so ist $\lambda^* = \sigma_1$, dem Raum der Folgen mit absolut konvergenter Summe, $\lambda^{**} = \sigma_\infty$, dem Raum der beschränkten Folgen.. Tritt an die Stelle von $\mathfrak{e}$ eine beliebige Stelle $\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit $a_i \neq 0$ für alle i, so ist λ^* zu σ_1 diagonaltransformiert, man erhält λ^* aus σ_1, indem

[4]) Math. Annalen **114** (1937), S. 126—143, zitiert als H.

[5]) Göttinger Nachr. Math. Phys. Klasse 1907, S. 101—109. In σ_∞ gilt das Reziprokentheorem ebenfalls, wie in K 3 bewiesen wurde.

man aus jeder Stelle $\mathfrak{x} \in \sigma_1$ die Stelle $\tilde{\mathfrak{x}}$ mit $\tilde{x}_k = \frac{x_k}{a_k}$ bildet. Sind in $\mathfrak{a}$ unendlichviele $a_j = 0$, so zerspaltet sich λ^* in zwei Räume, deren einer zu σ_1 diagonaltransformiert ist, der andere beliebige Stellen enthält, also vom Typus ω ist. λ^{**} ist dann die direkte Summe eines zu σ_∞ diagonaltransformierten Raumes und eines Raumes vom Typus φ, des Raumes der finiten Stellen.

Wir bezeichnen die vollkommene Hülle des aus den Vielfachen von $\mathfrak{a}$ bestehenden linearen Raumes mit $\lambda_{\mathfrak{a}}$.

Die vollkommene Hülle $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)}}$ von endlich vielen Stellen $\mathfrak{a}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)}$ läßt sich als $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$ schreiben,

$$\mathfrak{b}^{(n)} = \{\sum_1^n |a_1^{(i)}|, \sum_1^n |a_2^{(i)}|, \ldots\},$$

wie man leicht sieht.

Die vollkommene Hülle $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots}$ von höchstens abzählbar vielen Stellen $\mathfrak{a}^{(i)}$ werden wir als den *Stufenraum* mit den *Stufen* $\mathfrak{a}^{(i)}$ bezeichnen, den dualen Raum $\lambda^*_{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots}$ aller $\mathfrak{u}$ mit $[\mathfrak{a}^{(i)}\mathfrak{u}] = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(i)}||u_k| < \infty$ für $i = 1, 2, \ldots$ als den durch die $\mathfrak{a}^{(i)}$ *gestuften Raum.*

Durch die Stufen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$ wird offenbar ω als gestufter Raum erzeugt, der dazugehörige Stufenraum ist also φ.

Allgemein läßt sich zu gegebenen Stufen der Stufenraum finden nach

Satz 1. *Der Stufenraum $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots}$ ist die Vereinigungsmenge der vollkommenen Räume $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}} = \lambda_{\mathfrak{b}^{(1)}}$, $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}} = \lambda_{\mathfrak{b}^{(2)}}, \ldots$.*

Beweis. Da $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)}} = \lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$ in $\lambda = \lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots}$ liegt, genügt es zu zeigen, daß jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ in einem $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$ liegt.

Es sei $\mathfrak{x}^{(0)}$ eine Stelle, die in keinem $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$ liegt. Es gibt dann eine Stelle $\mathfrak{u}^{(1)}$ in $\lambda^*_{\mathfrak{b}^{(1)}}$ mit $\sum_1^\infty |u_k^{(1)}||x_k^{(0)}| = \infty$ und $\sum_1^\infty |u_k^{(1)}||a_k^{(1)}| \leqq \frac{1}{2}$. Also gibt es auch eine finite Stelle $\mathfrak{v}^{(1)} = \{v_1, \ldots, v_{n_1}, 0, 0, \ldots\}$ mit $\mathfrak{v}^{(1)}\mathfrak{x}^{(0)} = \sum_1^{n_1} v_k x_k^{(0)} \geqq 1$ und $\sum_1^{n_1} |v_k||a_k^{(1)}| \leqq \frac{1}{2}$. Allgemein werde

$$\mathfrak{v}^{(r)} = \{0, 0, \ldots, 0, v_{n_{r-1}+1}, \ldots, v_{n_r}, 0, 0, \ldots\}$$

aus einer Stelle $\mathfrak{u}^{(r)}$ aus $\lambda^*_{\mathfrak{b}^{(r)}}$ so bestimmt, daß $\mathfrak{v}^{(r)}\mathfrak{x}^{(0)} \geqq 1$ und

$$\sum_{n_{r-1}+1}^{n_r} |v_k||a_k^{(j)}| \leqq \frac{1}{2^r}$$

ist für $j = 1, \ldots, r$. $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^{(1)} + \mathfrak{v}^{(2)} + \cdots$ liegt in λ^*, denn $\mathfrak{v}\mathfrak{a}^{(r)}$ ist wegen

$$|\mathfrak{v}\mathfrak{a}^{(r)}| \leqq \sum_1^{n_{r-1}} |v_k||a_k^{(r)}| + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^{r+1}} + \cdots$$

für jedes r absolut konvergent. Andererseits divergiert $\mathfrak{v}\mathfrak{x}^{(0)} = \mathfrak{v}^{(1)}\mathfrak{x}^{(0)} + \mathfrak{v}^{(2)}\mathfrak{x}^{(0)} + \cdots \geqq 1 + 1 + \cdots$, $\mathfrak{x}^{(0)}$ liegt also nicht in λ.

Die Stufen, die zur Definition eines Stufenraumes λ verwendet werden können, sind keineswegs eindeutig bestimmt. Jedes Stufensystem von λ kann durch Hinzunahme von geeigneten $\mathfrak{e}_i$ zu einem *vollständigen* Stufensystem ergänzt werden, in dem zu jeder Koordinate wenigstens eine Stufe vorkommt, in der diese Koordinate nicht verschwindet.

Satz 2. *Ist das Stufensystem* $\mathfrak{a}^{(i)}$ *vollständig, so besteht der Stufenraum* $\lambda = \lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots}$ *aus allen Stellen* $\mathfrak{x}$, *zu denen es eine ganze Zahl* n *und ein* $M > 0$ *gibt, so daß*

$$|x_k| \leqq M b_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

gilt.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Umgekehrt: Eine Stelle $\mathfrak{x}$ aus λ liegt nach Satz 1 in einem $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$. Also gibt es ein M, so daß (1) für alle k richtig ist, für die $b_k^{(n)} \neq 0$ ist. Nur auf endlich vielen Koordinaten kann $\mathfrak{x}$ außerdem von Null verschieden sein. Wegen der Vollständigkeit der $\mathfrak{a}^{(i)}$ gibt es ein späteres $\mathfrak{b}^{(n')}$, das auf allen diesen Koordinaten von Null verschieden ist. Da außerdem $b_k^{(n)} \leqq b_k^{(n')}$ für alle k gilt, folgt die Behauptung sofort.

$\mathfrak{b}^{(1)}, \mathfrak{b}^{(2)}, \ldots$ ist ein zu $\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots$ äquivalentes Stufensystem, also auch das System $\mathfrak{c}^{(n)} = n\mathfrak{b}^{(n)}$. Aus Satz 2 folgt jetzt sofort

Satz 3. *In jedem Stufenraum* λ *gibt es eine monoton wachsende Stufenfolge* $\mathfrak{c}^{(i)}$ *mit nur nichtnegativen Koordinaten, so daß zu jedem* $\mathfrak{x} \in \lambda$ *ein* i *existiert mit* $|x_k| \leqq c_k^{(i)}$ *für* $k = 1, 2, \ldots$.

Die beschränkten Mengen eines Stufenraumes lassen sich jetzt leicht bestimmen.

Satz 4. *Eine Menge* U *von Stellen* $\mathfrak{u}$ *des gestuften Raumes* λ^* *ist dann und nur dann beschränkt, wenn es zu einer vollständigen Stufenfolge* $\mathfrak{a}^{(i)}$ *Zahlen* M_i *gibt, so daß*

$$\sup_{\mathfrak{u} \in U} [\mathfrak{u}\mathfrak{a}^{(i)}] \leqq M_i, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

ist, (es bedeutet $[\mathfrak{u}\mathfrak{x}] = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| |x_i|$).

Beweis. Die Notwendigkeit folgt aus der Definition der Beschränktheit und der Tatsache, daß die normale Hülle einer beschränkten Menge wieder beschränkt ist (vgl. KT § 5).

Ist U umgekehrt eine Menge, die (2) erfüllt und $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus λ, so gibt es nach Satz 2 ein $\mathfrak{b}^{(n)}$ mit $|x_k| \leqq M b_k^{(n)} = M \sum_1^n |a_k^{(i)}|$, also ist

$$\sup_{\mathfrak{u} \in U} |[\mathfrak{u}\mathfrak{x}]| \leqq M \sum_{i=1}^{n} \sup [\mathfrak{u}\mathfrak{a}^{(i)}] \leqq M \sum_{i=1}^{n} M_i < \infty.$$

Satz 5. *Eine Menge* X *von Stellen* $\mathfrak{x}$ *des Stufenraumes* λ *mit dem vollständigen Stufensystem* $\mathfrak{a}^{(i)}$ *ist dann und nur dann beschränkt,*

wenn es ein $\mathfrak{b}^{(n)}$ *und ein* $M > 0$ *gibt, so daß*

$$|x_k| \leqq M b_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

für alle $\mathfrak{x} \in X$ *gilt, d. h. wenn* X *ganz in einem* $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$ *liegt und dort beschränkt ist.*

Beweis. Die Bedingung ist offenbar hinreichend. Es sei andererseits X beschränkt und (3) für kein n erfüllt. Dann gibt es zu jedem n ein $\mathfrak{x}^{(n)} \in X$ und eine natürliche Zahl k_n, so daß $|x_{k_n}^{(n)}| > n b_{k_n}^{(n)}$ ist. Zu $\mathfrak{x}^{(n)}$ gibt es ein $\mathfrak{u}^{(n)}$ in λ^*, so daß $[\mathfrak{u}^{(n)} \mathfrak{b}^{(n)}] \leqq 1$, aber

$$[\mathfrak{u}^{(n)} \mathfrak{x}^{(n)}] > n \tag{4}$$

ist. Die $\mathfrak{u}^{(n)}$ bilden wegen $[\mathfrak{u}^{(n+k)} \mathfrak{b}^{(n)}] \leqq [\mathfrak{u}^{(n+k)} \mathfrak{b}^{(n+k)}] \leqq 1$ nach Satz 4 eine beschränkte Menge U in λ^*. Nach KT § 5 Satz 1 und 2 müßte dann aber $\sup_{\substack{\mathfrak{u} \in U \\ \mathfrak{x} \in X}} [\mathfrak{u}\mathfrak{x}] \leqq K < \infty$ sein im Widerspruch zu (4).

Aus Satz 3 ergibt sich sofort

Satz 5a. *X ist dann und nur dann beschränkt, wenn es ein* $\mathfrak{c}^{(n)}$ *gibt, so daß*

$$|x_k| \leqq c_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

für alle $\mathfrak{x} \in X$ *gilt.*

Beispiele. 1. Sind λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, Stufenräume mit den Stufen $\mathfrak{a}^{(i,1)}, \mathfrak{a}^{(i,2)}, \ldots$, so bilde man alle Stellen $\{\mathfrak{a}^{(1,j_1)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n,j_n)}, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \ldots\}$, wobei die $\mathfrak{o}$ Nullstellen sind, die $\mathfrak{a}^{(i,j_i)}$ in beliebiger, aber endlicher Anzahl n vorkommen. Der dazugehörige gestufte Raum wird zweckmäßig mit $\omega(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots)$ bezeichnet; man erhält seine Stellen, indem man in einer Stelle aus ω die i-te Koordinate durch eine beliebige Stelle aus λ_i^* ersetzt. Der dazugehörige Stufenraum ist dann $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$.

Ordnet man in einer vollständigen Stufenfolge $\mathfrak{b}^{(i)}$ eines beliebigen Stufenraumes die Koordinaten so um, daß zuerst die kommen, die in $\mathfrak{b}^{(1)}$ nicht verschwinden, dann die, die zwar in $\mathfrak{b}^{(1)}$, aber nicht in $\mathfrak{b}^{(2)}$ verschwinden, also

$$\mathfrak{b}^{(1)} = \{\mathfrak{b}^{(1,1)}, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \ldots\}, \quad \mathfrak{b}^{(2)} = \{\mathfrak{b}^{(2,1)}, \mathfrak{b}^{(2,2)}, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \ldots\}, \ldots,$$

so wird $\lambda_{\mathfrak{b}^{(1)}, \mathfrak{b}^{(2)}, \ldots}$ gleich $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, λ_i der durch die Stufenfolge $\mathfrak{b}^{(i,i)}, \mathfrak{b}^{(i+1,i)}, \ldots$ definierte, eventuell endlich dimensionale Stufenraum. λ_i besitzt eine Stufenfolge, in der sämtliche Koordinaten von Null verschieden sind.

2. Nimmt man als Stufen die Stellen $\mathfrak{w}^{(i)} = \{1, w_i, w_i^2, \ldots\}$, w_i komplex, $0 \leqq |w_1| \leqq |w_2| \leqq \ldots$, $\lim_{i \to \infty} |w_i| = \infty$, so ist der dazugehörige gestufte Raum π der Raum der ganzen transzendenten Funktionen, wenn wir jede Stelle $\mathfrak{u}$ aus π als das Koeffizientensystem einer Potenz-

reihe auffassen. Der Stufenraum ist nach Satz 2 der Raum ϱ der Potenzreihen mit endlichem Konvergenzradius und dem Mittelpunkt O [6]).

3. Ist $0 \leqq |w_1| \leqq |w_2| \leqq \ldots$, $\lim\limits_{i \to \infty} |w_i| = r$, aber kein $w_i = r$, so gehört zur Folge $\mathfrak{w}^{(i)}$ als gestufter Raum π_r, der Raum der Potenzreihen mit einem Konvergenzradius $\geqq r$. Der zugehörige Stufenraum ϱ_r ist der Raum der Potenzreihen mit einem Konvergenzradius $> \frac{1}{r}$.

4. Der Stufenraum $\varphi + \varrho$ kann gedeutet werden als Raum der LAURENT-Reihen um O der Funktionen, die in O einen Pol haben. Der duale Raum $\omega + \pi$ hat keine unmittelbare funktionentheoretische Deutung.

§ 2.

Schwache und starke Konvergenz.

Wir untersuchen die verschiedenen Arten der Konvergenz in den Stufenräumen und ihren dualen Räumen.

Satz 1. *In einem Stufenraum λ ist jede beschränkte Menge schwach kompakt, es gilt also der sogenannte Grenzstellensatz.*

Beweis. Nach § 1 Satz 5 ist die beschränkte Menge X in einem $\lambda_{b^{(n)}}$ beschränkt. $\lambda_{b^{(n)}}$ ist diagonaltransformiert zu $\sigma_\infty + \varphi$ (oder σ_∞ oder φ); in diesem Raum gilt der Grenzstellensatz (vgl. z. B. K 1 § 1), also auch in $\lambda_{b^{(n)}}$. Da jede im Sinn von $\lambda_{b^{(n)}}$ schwach konvergente Folge wegen $\lambda^* \subseteq \lambda^*_{b^{(n)}}$ erst recht im Sinn von λ schwach konvergent ist, besitzt daher X eine in λ schwach konvergente Teilfolge.

Satz 2. *In jedem gestuften Raum λ^* fallen schwache und starke Konvergenz zusammen.*

Beweis. $\mathfrak{u}^{(n)}$ sei eine schwach konvergente Folge in λ^*. Da $\lambda \supseteq \lambda_{b^{(n)}}$ ist, konvergiert sie auch schwach als Folge in $\lambda^*_{b^{(n)}}$. Dieser Raum ist diagonaltransformiert zu $\sigma_1 + \omega$ (oder σ_1 oder ω). In $\sigma_1 + \omega$ fällt aber die starke mit der schwachen Konvergenz zusammen (vgl. z. B. KT § 13 Satz 3), es gilt daher für jede beschränkte Menge $X^{(n)}$ aus $\lambda_{b^{(n)}}$

$$\sup_{\mathfrak{x} \in X^{(n)}} [(\mathfrak{u}^{(p)} - \mathfrak{u}^{(q)})\mathfrak{x}] \to 0 \quad \text{für} \quad p, q \to \infty .$$

Da dies für alle n gilt, gilt es nach § 1 Satz 5 für alle beschränkten Mengen aus λ, d. h. $\mathfrak{u}^{(n)}$ ist stark konvergent in λ^*.

Satz 3. *Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ von Stellen des Stufenraumes $\lambda = \lambda_{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots}$ ist dann und nur dann schwach konvergent, wenn sie in einem $\lambda_{b^{(n)}}$ schwach konvergiert.*

---

[6]) Zum Beweise der Behauptungen dieses und des nächsten Absatzes ziehe man die bekannte Formel für den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ heran, $\frac{1}{r} = \overline{\lim} \sqrt[k]{|u_k|}$.

Beweis. Konvergiert $\mathfrak{x}^{(n)}$ schwach in $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$, so auch in λ. Ist umgekehrt die Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ schwach konvergent in λ, so ist sie nach KT § 5 Satz 6 beschränkt und koordinatenweise konvergent, da in λ^* starke und schwache Konvergenz zusammenfallen. Nach § 1 Satz 5 und nochmals KT § 5 Satz 6 ist sie dann aber in einem $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$ schwach konvergent.

Streicht man aus allen Stellen eines Koordinatenraumes λ bestimmte Koordinaten, z. B. die mit ungeradem Index, so bezeichnen wir den Raum der verkürzten Stellen als einen *Stückraum* von λ. Ist λ vollkommen, so auch der Stückraum und die schwache bzw. starke Konvergenz im Stückraum fällt mit der in λ zusammen.

Satz 4. *In dem Stufenraum λ fallen schwache und starke Konvergenz dann und nur dann zusammen, wenn λ keinen zu σ_∞ diagonaltransformierten Stückraum besitzt.*

Beweis. Da in σ_∞ schwache und starke Konvergenz nicht zusammenfallen, ist die Bedingung notwendig.

Es sei andererseits $\mathfrak{x}^{(n)}$ eine schwach, aber nicht stark gegen $\mathfrak{o}$ konvergente Folge in λ. Nach Satz 3 und § 1 Satz 5 ist die Folge koordinatenweise gegen $\mathfrak{o}$ konvergent und es gilt $|x_k^{(n)}| \leqq M b_k^{(m)}$ für alle n, k für ein geeignetes $\mathfrak{b}^{(m)}$ in λ. Der Einfachheit halber setzen wir (was ja nur auf eine Diagonaltransformation von λ und Weglassung von Koordinaten, auf denen alle $\mathfrak{x}^{(n)}$ verschwinden, hinausläuft) $M\mathfrak{b}^{(m)} = \mathfrak{e}$ voraus, dann haben wir

$$|x_k^{(n)}| \leqq 1,\ n, k = 1, 2, \ldots, \text{ und } \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0. \tag{6}$$

Da $\mathfrak{x}^{(n)}$ nicht stark gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert, gibt es nach KT § 5 eine beschränkte normale Menge U in λ^*, so daß

$$\sup_{\mathfrak{u}\in U} [\mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}] \geqq 2c > 0 \tag{7}$$

für eine geeignete Teilfolge gilt, die wir mit der ursprünglichen Folge identifizieren wollen.

Nach (7) und (6) gibt es nun ein $\mathfrak{u}^{(1)} \in U$ mit $c < \sum_1^\infty |u_k^{(1)}||x_k^{(1)}| \leqq \sum_1^\infty |u_k^{(1)}|$. Es werde r_1 so bestimmt, daß noch $\sum_1^{r_1} |u_k^{(1)}| > c$ ist. Da die 1-ten bis r_1-ten Koordinaten der Stellen von U beschränkt sind und nach (6) $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0$ ist, gibt es ein $\mathfrak{x}^{(p_2)}$ und ein $\mathfrak{u}^{(2)}$ mit $\sum_{r_1+1}^\infty |u_k^{(2)}||x_k^{(p_2)}| > c$ und dazu ein r_2 mit $\sum_{r_1+1}^{r_2} |u_k^{(2)}| > c$ usf. Da U normal ist, liegen die Stellen $\tilde{\mathfrak{u}}^{(1)} = \sum_1^{r_1} u_k^{(1)} \mathfrak{e}_k$, $\tilde{\mathfrak{u}}^{(2)} = \sum_{r_1+1}^{r_2} u_k^{(2)} \mathfrak{e}_k, \ldots$ in U. Nach § 1 Satz 4 gibt es zu jedem i ein M_i, so daß

$$[\tilde{\mathfrak{u}}^{(j)} \mathfrak{b}^{(i)}] \leqq M_i,\ j = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

gilt.

Es sei $k_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} \leqq \frac{1}{2}$. Wir betrachten diejenigen Koordinaten $b_{t_i}^{(i)}$ von $\mathfrak{b}^{(i)}$, für die $r_j < t_i \leqq r_{j+1}$ und

$$b_{t_i}^{(i)} \geqq \frac{M_i k_i}{c} \tag{9}$$

gilt. Für die entsprechenden Koordinaten $u_{t_i}^{(j)}$ von $\tilde{\mathfrak{u}}^{(j)}$ muß $\sum_{t_i} |u_{t_i}^{(j)}| < \frac{c}{k_i}$ sein, da andernfalls

$$\sum_{t_i} |u_{t_i}^{(j)}|\, b_{t_i}^{(i)} \geqq \frac{M_i k_i}{c} \sum_{t_i} |u_{t_i}^{(j)}| \geqq M_i$$

wäre im Widerspruch zu (8). Zu jedem i gibt es also nur so viele t_i zwischen r_j nnd r_{j+1}, daß $\sum_{t_i} |u_{t_i}^{(j)}| < \frac{c}{k_i}$ ist. Bilden wir die Summe für alle i über alle diese $u_{t_i}^{(j)}$, so erhalten wir insgesamt höchstens

$$\sum_i \sum_{t_i} |u_{t_i}^{(j)}| < c \sum_i \frac{1}{k_i} \leqq \frac{c}{2}.$$

Es ist aber $\sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}} |u_k^{(j)}| > c$, daher gibt es zu jedem j Indizes s_j mit $r_j < s_j \leqq r_{j+1}$, die von allen t_i verschieden sind, also für kein i (9) erfüllen. Für alle diese s_j, $j = 1, 2, \ldots$, gilt daher $b_{s_j}^{(i)} \leqq \frac{M_i k_i}{c}$, auf diesen Indizes ist jedes $\mathfrak{b}^{(i)}$ beschränkt. Andererseits enthält λ die Stelle e, also ist der zu den s_j gehörige Stückraum von λ gleich σ_∞.

Satz 5. *In dem gestuften Raum λ^* gilt dann und nur dann der Grenzstellensatz, wenn λ^* keinen zu σ_1 diagonaltransformierten Stückraum besitzt.*

Da in σ_1 der Grenzstellensatz nicht gilt, ist die Bedingung notwendig. Ist andererseits die Bedingung erfüllt, so fällt in λ nach Satz 4 die starke mit der schwachen Konvergenz zusammen, insbesondere konvergieren die Abschnitte jeder Stelle aus λ stark gegen die Stelle. Dies ist aber nach K 1 § 1 Satz 3 hinreichend dafür, daß in λ^* der Grenzstellensatz gilt.

Eine einfache hinreichende Bedingung gibt

Satz 6. *In dem Stufenraum $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots}$ fällt die starke mit der schwachen Konvergenz zusammen, wenn zu jedem i ein $N_i > i$ existiert, so daß*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{b_k^{(i)}}{b_k^{(N_i)}} = 0 \tag{10}$$

ist, wobei k die Indizes durchläuft, für die $b_k^{(i)} \neq 0$ ist.

Beweis. Wir zeigen gleich mehr. Wir beweisen, daß *jede schwach gegen $\mathfrak{o}$ konvergente Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus λ stark gegen $\mathfrak{o}$ in einem $\lambda_{\mathfrak{b}^{(N_i)}}$ konvergiert.*

Die Stufenfolge $\mathfrak{a}^{(i)}$ kann als vollständig vorausgesetzt werden. Nach Satz 3 und § 1 Satz 5 gibt es ein $\mathfrak{b}^{(i)}$, so daß $|x_j^{(n)}| \leqq M\, b_j^{(i)}$ ist für

alle $j = 1, 2, \ldots$; speziell ist $x_j^{(n)} = 0$, wenn $b_j^{(i)} = 0$ ist. Ist nun $\varepsilon > 0$ gegeben, so kann man nach (10) k_0 so bestimmen, daß für alle $k > k_0$

$$|x_k^{(n)}| \leqq M b_k^{(i)} \leqq M b_k^{(N_i)} \frac{b_k^{(i)}}{b_k^{(N_i)}} \leqq \varepsilon b_k^{(N_i)} \tag{11}$$

gilt. Da $\mathfrak{x}^{(n)}$ koordinatenweise gegen Null konvergiert, wird für genügend großes n (11) auch für $k \leqq k_0$ gültig. (11) bedeutet, daß das für alle $b_k^{(N_i)} \neq 0$ gebildete $\sup_k \frac{|x_k^{(n)}|}{b_k^{(N_i)}}$ mit $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, das ist aber gerade die starke Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ in $\lambda_{\mathfrak{b}^{(N_i)}}$.

In den Fällen, in denen die Bedingung (10) erfüllt ist, gilt also in Analogie zu Satz 3, daß jede stark konvergente Folge aus λ bereits in einem $\lambda_{\mathfrak{b}^{(i)}}$ stark konvergent ist.

Daß dies nicht allgemein der Fall ist, zeigt das folgende Beispiel: Es sei $\mathfrak{b}^{(n)} = \{1, n, n^2, \ldots\}$. Wir bilden die Stellen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}^{(1)} &= \{\mathfrak{b}^{(1)}, \mathfrak{b}^{(1)}, \ldots\}, \\
\mathfrak{B}^{(2)} &= \{\mathfrak{b}^{(2)}, 2\mathfrak{b}^{(1)}, 2^2\mathfrak{b}^{(1)}, \ldots\}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{B}^{(n)} &= \{\mathfrak{b}^{(n)}, n\mathfrak{b}^{(n-1)}, \ldots, n^{n-1}\mathfrak{b}^{(1)}, n^n\mathfrak{b}^{(1)}, \ldots\}. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Der Stufenraum $\lambda = \lambda_{\mathfrak{B}^{(1)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \ldots}$ erfüllt nicht die Bedingung (10), wie leicht zu sehen ist, hat aber keinen Stückraum vom Typus σ_∞: Ist $\mathfrak{x} = \{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots\}$ eine beliebige Stelle aus λ, so bilden die $\mathfrak{x}_i$ für festes i offenbar einen Raum ϱ, der (10) erfüllt, aber bestimmt keinen Stückraum vom Typus σ_∞ besitzt. Wählt man für jedes i andererseits endlich viele Indizes aus und bildet man die Quotienten der Koordinaten mit diesen Indizes aus $\mathfrak{B}^{(n)}$ und $\mathfrak{B}^{(n+1)}$, so erhält man eine Folge mit dem Limes 0, also ergibt auch diese Möglichkeit keinen σ_∞-artigen Stückraum. In λ fällt daher die schwache mit der starken Konvergenz zusammen. $\mathfrak{b}^{(1,k)}$ sei die Stelle, die in jeder Abteilung gleich dem k-ten Abschnitt $\mathfrak{b}_k^{(1)} = \{1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots\}$ von $\mathfrak{b}^{(1)}$ ist. Diese Folge konvergiert schwach, also stark gegen $\mathfrak{b}^{(1)}$. Sie konvergiert jedoch in keinem $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$ stark, denn $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$ ist in der n-ten Abteilung gleich σ_∞, $\mathfrak{b}^{(1)}$ ist dort gleich $\mathfrak{e}$, die Abschnitte von $\mathfrak{e}$ konvergieren in σ_∞ nur schwach, nicht stark gegen $\mathfrak{e}$.

In den Räumen ϱ_r fällt nach Satz 6 die starke mit der schwachen Konvergenz zusammen, in den dualen π_r gilt der Grenzstellensatz.

§ 3.

Die t-Konvergenz.

Nach den Ergebnissen von § 2 ist die Forderung, daß eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus dem Stufenraum $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots}$ bereits in einem $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$ stark konvergiert, schärfer als die Forderung, daß sie in λ stark konvergiert.

Wir führen deshalb in einem beliebigen vollkommenen Raum einen neuen Konvergenzbegriff ein:

M sei eine beschränkte normale Menge in λ. Mit $|\mathfrak{x}|_M$ bezeichnen wir das *Minkowskische Funktional* von M (vgl. K 5 § 2). Es ist also $|\mathfrak{x}|_M$ gleich $\frac{1}{r}$, wenn r die obere Grenze der positiven r ist, für die $r\mathfrak{x}$ in M liegt. Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus λ heiße *total konvergent*, kurz *t-konvergent*, wenn es eine beschränkte normale Menge in λ gibt, so daß $|\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}^{(m)}|_M \to 0$ geht, *t-konvergent gegen* $\mathfrak{x}$, wenn $|\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}|_M \to 0$.

Satz 1. *Jede t-konvergente Folge ist stark konvergent.*

Ist U beschränkt in λ^*, so ist $\sup\limits_{\substack{\mathfrak{u}\in U\\ \mathfrak{x}\in M}} |\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}| = k < \infty$. Ist nun $|\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}^{(m)}|_M < \varepsilon$, also $\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}^{(m)}) \in M$, so ist $\sup\limits_{\mathfrak{u}\in U} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}^{(m)})| \leqq k\varepsilon$, d. h. $\mathfrak{x}^{(n)}$ ist stark konvergent.

Ist λ ein metrischer vollkommener Raum und nimmt man als Menge M die Menge aller $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{x}| \leqq 1$, so wird $|\mathfrak{x}|_M = |\mathfrak{x}|$ und die starke Konvergenz und die t-Konvergenz fallen zusammen.

In einem Stufenraum bedeutet die t-Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(n)}$ offenbar, daß $\mathfrak{x}^{(n)}$ bereits in einem $\lambda_{\mathfrak{b}^{(n)}}$ stark konvergiert [7]). Das Beispiel aus § 2 zeigt also, daß Satz 1 nicht umkehrbar ist.

Satz 2. *In einem Stufenraum fallen schwache und t-Konvergenz dann und nur dann zusammen, wenn* (10) *gilt.*

Beweis. Daß die Bedingung hinreichend ist, wurde in § 2 Satz 6 bewiesen. Ist andererseits jede schwach konvergente Folge t-konvergent, so konvergiert für jedes i die Folge der Abschnitte $\mathfrak{b}_n^{(i)}$ von $\mathfrak{b}^{(i)}$ stark in einem $\lambda_{\mathfrak{b}^{(\varkappa_i)}}$. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn (10) erfüllt ist.

Satz 3. *In einem gestuften Raum fallen schwache, starke und t-Konvergenz zusammen.*

Beweis. Nach § 2 Satz 2 genügt es zu zeigen. daß die starke und die t-Konvergenz zusammenfallen.

Sei $\mathfrak{u}^{(n)}$ stark konvergent gegen $\mathfrak{o}$ im gestuften Raum λ^*. Für die Stufenfolge $\mathfrak{a}^{(i)}$ von λ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} [\mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{a}^{(i)}] = 0 \tag{11}$$

für jedes i. Sei

$$\sup_n [\mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{a}^{(i)}] = M_i. \tag{12}$$

Als beschränkte Menge in λ^* nehmen wir die Menge U aller $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ mit

$$[\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}^{(i)}] \leqq i M_i,\ i = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

---

[7]) Die t-Konvergenz fällt daher mit der von Eidelheit als starke Konvergenz bezeichneten in den Stufenräumen zusammen (vgl. E S. 140).

U ist nach § 1 Satz 4 beschränkt. Ist nun $\varepsilon = \frac{1}{k}$ gegeben, so läßt sich wegen (11) ein n_0 so bestimmen, daß für $n \geqq n_0$ und $i = 1, \ldots, k$

$$[\mathfrak{u}^{(n)} \mathfrak{a}^{(i)}] \leqq \frac{i\, M_i}{k}$$

ist. Wegen (12) und (13) ist diese Beziehung für alle $i > k$ ebenfalls erfüllt. Es ist daher für $n \geqq n_0$ $|\mathfrak{u}^{(n)}|_U \leqq \frac{1}{k}$, $\mathfrak{u}^{(n)}$ also t-konvergent gegen $\mathfrak{o}$.

Satz 4. *Ist M eine normale, beschränkte und komplette Menge aus dem vollkommenen Raum λ, so bilden die Vielfachen $r\mathfrak{x}$ aller Stellen aus M einen vollständigen metrischen Raum λ_M mit der Metrik* $|\mathfrak{x}|_M = \sup_{\mathfrak{u} \in M^+} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}|$.

Beweis. Eine komplette Menge M (vgl. K 5 § 1) ist absolut konvex, also gilt nach K 5 § 2 Satz 2 $|\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2|_M \leqq |\mathfrak{x}_1|_M + |\mathfrak{x}_2|_M$ und $|a\mathfrak{x}|_M = |a|\,|\mathfrak{x}|_M$, λ_M ist also ein linearer metrischer Raum. M besteht nach K 5 § 1 aus allen $\mathfrak{x}$ mit $\sup_{\mathfrak{u} \in M^+} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq 1$[8]), also ist $|\mathfrak{x}|_M = \sup_{\mathfrak{u} \in M^+} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}|$.

Ist schließlich $\mathfrak{x}^{(n)}$ eine metrisch konvergente Folge aus λ_M, so ist sie nach Satz 1 stark, also auch schwach konvergent, besitzt wegen der schwachen Vollständigkeit von λ (KT § 3 Satz 5) also einen Limes $\mathfrak{x}$ in λ. Aus $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}$ für jedes $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ folgt aber, daß mit $\mathfrak{x}^{(n)}$ auch $\mathfrak{x}$ die Bedingung $\sup_{\mathfrak{u} \in M^+} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq k$ erfüllt, $\mathfrak{x}$ liegt also in λ_M.

Satz 5. *Jede Matrix $\mathfrak{A}$, die den vollkommenen Raum λ in den vollkommenen Raum μ abbildet, ist eine t-stetige Abbildung.*

Beweis. Ist $\mathfrak{x}^{(n)}$ t-konvergent gegen $\mathfrak{o}$ in λ, so gibt es eine Folge $k_n \to \infty$, so daß alle $k_n \mathfrak{x}^{(n)}$ in M liegen, M eine beschränkte Menge in λ. Dann liegen aber die Stellen $\mathfrak{A}(k_n \mathfrak{x}^{(n)}) = k_n \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ in der beschränkten Menge $\mathfrak{A}(M)$ in μ, die Bildfolge $\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ ist also ebenfalls t-konvergent.

Als *t-abgeschlossen* bezeichnen wir eine Menge, die mit jeder t-konvergenten Folge auch ihren Limes enthält.

Satz 6. *Ist die Matrix $\mathfrak{A}$, die den vollkommenen Raum λ in den vollkommenen Raum μ abbildet, beschränkt umkehrbar, so ist $\mathfrak{A}(\lambda)$ t-abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ eine t-konvergente Folge aus $\mathfrak{A}(\lambda)$, $\mathfrak{y}$ ihr Limes in μ. Es gibt also eine beschränkte, normale, komplette Menge N in μ mit $|\mathfrak{y}^{(n)}|_N \leqq 1$, $|\mathfrak{y}|_N \leqq 1$ und $|\mathfrak{y}^{(n)} - \mathfrak{y}|_N \to 0$. Die Menge aller $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ aus N hat nach Voraussetzung eine beschränkte Urbildmenge M, es gibt daher zu jedem $\mathfrak{A}\mathfrak{x} \in N$ ein $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{z}$ und $|\mathfrak{z}|_M \leqq 1$, also gibt es sogar ein Urbild $\mathfrak{z}$ mit $|\mathfrak{z}|_M \leqq |\mathfrak{A}\mathfrak{x}|_N$.

---

[8]) M^+ ist die Menge aller $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ mit $\sup_{\mathfrak{x} \in M} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq 1$.

Da $|\mathfrak{y}^{(n)} - \mathfrak{y}|_N \to 0$ gilt, kann man eine Teilfolge $\mathfrak{y}^{(n_j)}$ so auswählen, daß $\sum_{j=1}^{\infty} |\mathfrak{y}^{(n_j)} - \mathfrak{y}|_N \leqq \frac{1}{2}$ ist. Dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} |\mathfrak{y}^{(n_{j+1})} - \mathfrak{y}^{(n_j)}|_N \leqq 1$. Es gibt nun Urbilder $\mathfrak{z}^{(j)}$ der $\mathfrak{y}^{(n_{j+1})} - \mathfrak{y}^{(n_j)}$, so daß $\sum_{j=1}^{\infty} |\mathfrak{z}^{(j)}|_M \leqq 1$ ist. Die Reihe $\mathfrak{x}^{(1)} + \sum_j \mathfrak{z}^{(j)}$ ist also t-konvergent in λ gegen eine Stelle $\mathfrak{z}^{(0)}$. Ihre Bildreihe $\mathfrak{y}^{(1)} + \sum_{j=1}^{\infty} (\mathfrak{y}^{(n_{j+1})} - \mathfrak{y}^{(n_j)})$ ist t-konvergent gegen $\mathfrak{y}$, also ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{z}^{(0)}$ nach Satz 5.

§ 4.

Häufungsstellen.

In den vollkommenen Räumen sind mehrere Topologien erklärt. Als Umgebung $U_{\{N,\varepsilon\}}(\mathfrak{x})$ der Stelle $\mathfrak{x}$ in λ wird die Menge aller $\mathfrak{y} \in \lambda$ bezeichnet, die der Ungleichung

$$\sup_{u \in N} |u(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})| = (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})_N < \varepsilon$$

genügen. Je nachdem, ob N alle beschränkten, alle begrenzten, alle endlichen, alle beschränkten und schwach kompakten Mengen aus λ^* durchläuft, erhält man die starke (st-), schwache (s-), minimale (m-), k-Topologie von λ.

Satz 1. *In jedem gestuften Raum λ^* fallen die s-, k- und st-Topologie zusammen.*

Beweis. In jedem Stufenraum λ fallen nach § 2 Satz 1 die beschränkten mit den beschränkten schwach kompakten und nach § 2 Satz 2 auch mit den begrenzten Mengen zusammen, daraus folgt die Behauptung.

Satz 2. *In jedem Stufenraum λ fallen die s- und k-Topologie zusammen. Die st-Topologie ist von ihnen dann und nur dann verschieden, wenn λ einen zu σ_∞ diagonaltransformierten Stückraum besitzt.*

Beweis. In λ gilt der Grenzstellensatz, also ist nach K 1 § 1 Satz 2 λ^* stark separabel. Jede begrenzte Menge in λ^* ist nach K 4 § 1 Satz 3 stark kompakt, wegen der Identität von starker und schwacher Konvergenz also auch schwach kompakt. Nach K 4 § 1 Satz 2 ist umgekehrt jede beschränkte, stark kompakte Menge begrenzt.

Die st- und s-Topologie fallen dann und nur dann zusammen, wenn in λ die starke und schwache Konvergenz übereinstimmen. Der zweite Teil der Behauptung folgt also aus § 2 Satz 4.

Satz 3. *In einem gestuften Raum λ^* ist jede s-Häufungsstelle einer Menge U schwacher Limes einer Folge aus U.*

Beweis. Ist $\mathfrak{u}^{(0)}$ schwache Häufungsstelle von U, so gibt es in der s-Umgebung $[(\mathfrak{u} - \mathfrak{u}^{(0)})\mathfrak{b}^{(n)}] < \frac{1}{n}$ von $\mathfrak{u}^{(0)}$ eine Stelle $\mathfrak{u}^{(n)}$. Nach § 1 Satz 2 ist die Folge $\mathfrak{u}^{(n)}$ schwach konvergent gegen $\mathfrak{u}^{(0)}$.

Satz 4. *Jede s-abgeschlossene Menge M eines Stufenraumes ist s-top. abgeschlossen*[9]).

Beweis. Wie in K 3 genügt es, eine schwach abgeschlossene Menge M in λ zu betrachten, die $\mathfrak{o}$ nicht enthält, und zu zeigen, daß $\mathfrak{o}$ dann keine schwache Häufungsstelle von M ist.

1. Nach den Überlegungen von § 1 Beispiel 1 können wir $\lambda = \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ annehmen, dann haben die Stufen $\mathfrak{c}^{(i)}$ von § 1 Satz 3 die Form

$$\mathfrak{c}^{(1)} = \{\mathfrak{c}_1^{(1)}, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \ldots\}, \quad \mathfrak{c}^{(2)} = \{\mathfrak{c}_1^{(2)}, \mathfrak{c}_2^{(2)}, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \ldots\}, \ldots$$

mit $\mathfrak{c}_k^{(i)} = \{c_{k1}^{(i)}, c_{k2}^{(i)}, \ldots\}$. Alle $c_{kj}^{(i)}$ mit $i \geqq k$ können dann als von Null verschieden vorausgesetzt werden. λ_k ist der Stufenraum zu den Stufen $\mathfrak{c}_k^{(i)}$, $i = k, k+1, \ldots$; λ_k kann auch endliche Dimension haben.

Jede Stelle $\mathfrak{x} \in \lambda$ hat die Gestalt $\mathfrak{x} = \{\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \ldots\}$. Wir nennen dann n die Länge von $\mathfrak{x}$. Die Koordinaten von $\mathfrak{x}$ seien auch mit doppelten Indizes bezeichnet, also ist $\mathfrak{x}_n = \{x_{n1}, x_{n2}, \ldots\}$. $\mathfrak{e}_{ik}$ ist die Stelle mit $x_{ik} = 1$, $x_{jl} = 0$ sonst.

2. M_{nj} sei für $j \leqq n$ erklärt als die Menge aller $\mathfrak{x} \in M$, für die

$$\begin{aligned} &|x_{ik}| \leqq c_{ik}^{(n)} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, j \text{ und alle } k \\ &|x_{ik}| \leqq c_{ik}^{(n-1)} \quad \text{für} \quad i > j \text{ und alle } k \end{aligned} \tag{14}$$

gilt. M_{nn} ist dann gerade die Menge aller $\mathfrak{x} \in M$ mit $|x_{ik}| \leqq c_{ik}^{(n)}$ für alle i und k, da $\mathfrak{c}^{(n)}$ ja die Länge n hat. Auf M_{nn} folgt als nächstgrößere Menge $M_{n+1,1}$. Die M_{nj} bilden also bei lexikographischer Anordnung der Indexpaare (n, j) eine aufsteigende Mengenfolge

$$M_{11} \leqq M_{21} \leqq M_{22} \leqq M_{31} \leqq \ldots. \tag{15}$$

N_{nj} sei die Menge aller $\mathfrak{x} \in M_{nj}$, die nicht in der in (15) unmittelbar vorangehenden Menge liegen. Für alle $\mathfrak{x} \in N_{nj}$ ist also

$$\sup_k \frac{|x_{jk}|}{c_{jk}^{(n-1)}} > 1 \quad \text{falls} \quad j < n, \tag{16 a}$$

$$\mathfrak{x}_n \neq \mathfrak{o} \quad \text{falls} \quad j = n \tag{16 b}$$

ist.

Nach § 1 Satz 5 a kommt jedes Element aus M in fast allen Gliedern von (15) vor. M_{nj} ist beschränkt, schwach abgeschlossen und enthält nur Stellen der Länge $\leqq n-1$, wenn $j \neq n$, bzw. der Länge $\leqq n$, wenn $j = n$ ist.

3. Hilfssatz. *Es gibt eine Folge reeller Zahlen $m_i > 0$ und eine (15) entsprechende Folge natürlicher Zahlen $g_{nj} > n$, so daß jedes $\mathfrak{x} \in M_{nj}$*

---

[9]) Der Satz wurde im Spezialfall $\lambda = \sigma_\infty$ bereits in K 3 § 1 bewiesen. Die dort angewandte Methode läßt sich auf den allgemeinen Fall übertragen.

wenigstens eine der Ungleichungen

$$\sup_{k \leqq g_{li}} \frac{|x_{ik}|}{c_{ik}^{(l-1)}} \leqq 1, \quad (l,i) \leqq (n,j) \text{ und } l > i \tag{17a}$$

$$\sup_{k \leqq g_{ii}} \frac{|x_{ik}|}{c_{ik}^{(i)}} \leqq m_i, \quad (i,i) \leqq (n,j) \tag{17b}$$

nicht erfüllt.

Beweis. Wir beweisen den Hilfssatz durch vollständige Induktion nach der lexikographisch geordneten Folge der (n,j). Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Der Satz sei bewiesen für M_{nj}, $j \neq n-1$. Wir haben ihn zu beweisen für $M_{n,j+1}$ bzw. $M_{n+1,1}$, falls $j = n$ ist. Wir führen nur den ersten Fall aus, da der andere sich nur durch die Bezeichnung von ihm unterscheidet.

Ein Element $\mathfrak{x} \in M_{n,j+1}$, das in M_{nj} liegt, verletzt nach Induktionsvoraussetzung eine der Ungleichungen (17). Es genügt also, die $\mathfrak{x}$ aus $N_{n,j+1}$ zu untersuchen. Für diese gilt (16a) mit $j+1$ statt j. Wir behaupten nun, daß es eine natürliche Zahl $g_{n,j+1} > n$ gibt, so daß für alle $\mathfrak{x} \in N_{n,j+1}$, die alle Ungleichungen (17) erfüllen,

$$\sup_{k \leqq g_{n,j+1}} \frac{|x_{j+1,k}|}{c_{j+1,k}^{(n-1)}} > 1 \tag{18}$$

ist. Andernfalls gäbe es eine Folge $\mathfrak{x}^{(r)} \in N_{n,j+1}$ mit $\sup\limits_{k \leqq r} \frac{|x_{j+1,k}^{(r)}|}{c_{j+1,k}^{(n-1)}} \leqq 1$. Nach dem Grenzstellensatz in λ gäbe es eine schwach konvergente Teilfolge, deren Limes $\mathfrak{x}^{(0)}$ wegen der Abgeschlossenheit von $M_{n,j+1}$ und der für alle k gültigen Ungleichungen $|x_{j+1,k}^{(0)}| \leqq c_{j+1,k}^{(n-1)}$ in M_{nj} liegen müßte. $\mathfrak{x}^{(0)}$ würde aber mit den $\mathfrak{x}^{(r)}$ alle Ungleichungen (17) erfüllen, was unmöglich ist. Die Stellen aus $M_{n,j+1}$, die alle Ungleichungen (17) erfüllen, genügen (18), womit der Hilfssatz für $M_{n,j+1}$ bewiesen ist.

b) Der Hilfssatz sei bewiesen für $M_{n,n-1}$. Für jedes $\mathfrak{x} \in N_{nn}$ gilt (16b). Wir behaupten zuerst, daß es ein $m_n > 0$ gibt, so daß für alle $\mathfrak{x} \in N_{nn}$, die alle Ungleichungen (17) erfüllen,

$$\sup_{k} \frac{|x_{nk}|}{c_{nk}^{(n)}} > m_n$$

ist. Andernfalls gäbe es eine Folge $\mathfrak{x}^{(r)} \in N_{nn}$ mit $\sup\limits_{k} \frac{|x_{nk}^{(r)}|}{c_{nk}^{(n)}} \xrightarrow{r} 0$. Eine Teilfolge würde einen Limes $\mathfrak{x}^{(0)}$ mit $\mathfrak{x}_n^{(0)} = \mathfrak{o}$ besitzen. $\mathfrak{x}^{(0)}$ läge daher in $M_{n,n-1}$ und müßte (17) erfüllen, was unmöglich ist. Ein nochmaliger Schluß dieser Art zeigt, daß es eine natürliche Zahl g_{nn} gibt, so daß bereits

$$\sup_{k \leqq g_{nn}} \frac{|x_{nk}|}{c_{nk}^{(n)}} > m_n$$

ist für alle $\mathfrak{x} \in N_{nn}$, die (17) erfüllen.

Für M_{11} gilt die Schlußweise von b) ebenfalls, damit ist der Hilfssatz bewiesen.

4. Wir geben jetzt eine schwache Umgebung von $\mathfrak{o}$ an, die kein Element von M enthält.

B_i sei die Menge der Stellen

$$(19)\quad \frac{1}{m_i c_{i1}^{(i)}} e_{i1}, \ldots, \frac{1}{m_i c_{ig_{ii}}^{(i)}} e_{ig_{ii}};\quad \frac{1}{c_{i1}^{(i+1)}} e_{i1}, \ldots, \frac{1}{c_{ig_{i+1,i}}^{(i+1)}} e_{ig_{i+1,i}};\quad \frac{1}{c_{i1}^{(i+2)}} e_{i1}, \ldots.$$

Wir zeigen zuerst, daß B_i eine beschränkte Menge in λ_i^* ist. Es genügt zu beweisen, daß $\sup_{\mathfrak{u}\in B_i} [\mathfrak{u}\,\mathfrak{c}_i^{(n)}] < \infty$ ist für jedes $n > i$. Nun kommt in (19) $\frac{1}{c_{i1}^{(n)}} e_{i1}$ vor. Bilden wir damit $\left[\left(\frac{1}{c_{i1}^{(n)}} e_{i1}\right)\mathfrak{c}_i^{(n)}\right]$, so erhalten wir 1, ebenso ist $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{c}_i^{(n)}] \leqq 1$, wenn $\mathfrak{u}$ die auf $\frac{1}{c_{i1}^{(n)}} e_{i1}$ folgenden Stellen aus (19) durchläuft. Da nur endlich viele Stellen vorhergehen, ist die Behauptung bewiesen.

B_i ist schwach kompakt. Wir zeigen sogar, daß jede Folge $\mathfrak{u}^{(j)}$ aus nur verschiedenen Stellen aus B_i schwach gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert. Nach Definition der $\mathfrak{c}^{(i)}$ gibt es zu jedem n und $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, so daß $|c_{ik}^{(n)}| < \varepsilon |c_{ik}^{(N)}|$ für alle $i, k = 1, 2, \ldots$ gilt. Also wird $\left[\left(\frac{1}{c_{ik}^{(N')}} e_{ik}\right)\mathfrak{c}_i^{(n)}\right] < \varepsilon$ für $N' \geqq N$. Da die Folge $\mathfrak{u}^{(j)}$ nur endlich viele Glieder $\frac{1}{c_{ik}^{(m)}} e_{ik}$ mit $m < N$ enthält, ist $\lim_{j\to\infty} [\mathfrak{u}^{(j)}\,\mathfrak{c}_i^{(n)}] = 0$ für jedes n, d. h. $\mathfrak{u}^{(j)}$ konvergiert schwach gegen $\mathfrak{o}$.

Bilden wir die Vereinigungsmenge B aller B_i, so ist B in

$$\lambda^* = \omega(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots)$$

beschränkt und schwach kompakt. Die k-Umgebung $\sup_{\mathfrak{u}\in B} |\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}| < 1$ von $\mathfrak{o}$ enthält nun keine Stelle von M:

Jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus M erfüllt ja wenigstens eine der Ungleichungen (17) nicht, d. h. für ein (i, k, l) ist entweder $|x_{ik}| > c_{ik}^{(l-1)}$ oder $|x_{ik}| > m_i c_{ik}^{(i)}$. Der absolute Betrag des skalaren Produkts von $\mathfrak{x}$ mit $\frac{1}{c_{ik}^{(l-1)}} e_{ik}$ bzw. $\frac{1}{m_i c_{ik}^{(i)}} e_{ik}$ aus B ist daher > 1.

Satz 5. *Jeder schwach abgeschlossene lineare Teilraum eines Stufenraumes oder eines gestuften Raumes ist orthogonalabgeschlossen.*

Denn nach dem eben Bewiesenen bzw. Satz 3 ist er s-top. abgeschlossen, nach dem Orthogonalraumsatz (K 2 § 5 Satz 1) also auch orthogonalabgeschlossen.

§ 5.

Quotientenräume.

Wir werden zuerst einige Ergänzungen zu den allgemeinen Sätzen über die Quotientenräume in K 5 bringen und dann die über den allgemeinen Fall hinausgehenden Tatsachen über Stufenräume ableiten.

In einem linearen Raum λ sei die Topologie T gegeben. Eine Menge M von Elementen von λ heiße *T-beschränkt*, wenn es zu jeder Umgebung U von $\mathfrak{o}$ ein $r>0$ gibt, so daß M in rU liegt.

Die in KT § 5 gegebene Definition der beschränkten Menge gibt in diesem Sinn die m-beschränkten Mengen, d. h. die im Sinn der minimalen Topologie beschränkten. Die voll-beschränkten Mengen von KT § 5 sind die st-beschränkten. KT § 5 Satz 1 besagt also die Identität der m- und st-beschränkten Mengen, damit natürlich auch die der s- und k-beschränkten Mengen mit diesen. In den vollkommenen Räumen gibt es also nur eine Art von beschränkten Mengen.

Komplizierter liegen die Verhältnisse bei den Quotientenräumen. Es sei α ein orthogonalabgeschlossener Teilraum des vollkommenen Raumes λ, λ/α der zugehörige Quotientenraum. Nach K 5 § 3 Satz 1 ist $\bar{\alpha}$ der konjugierte Raum zu λ/α bezüglich der m-, s- und k-Topologie.

Nach K 5 § 3 Satz 3 kann die m-Beschränktheit einer Menge M von Stellen $\hat{\mathfrak{x}}$ aus λ/α durch $\sup_{\hat{\mathfrak{x}}\in M}|\mathfrak{u}\,\hat{\mathfrak{x}}|<\infty$ für alle $\mathfrak{u}\in\bar{\alpha}$ erklärt werden.

Nach K 5 § 3 Satz 5 ist eine Menge M aus λ/α dann und nur dann s- bzw. k-beschränkt, wenn

$$\sup_{\substack{\hat{\mathfrak{x}}\in M\\ \mathfrak{u}\in N}}|\mathfrak{u}\,\hat{\mathfrak{x}}|<\infty \tag{20}$$

ist für alle begrenzten bzw. beschränkten und schwach kompakten Mengen N aus $\bar{\alpha}$.

Bezeichnen wir in Analogie zu KT § 5 eine Menge M aus λ/α als *vollbeschränkt*, wenn (20) für alle beschränkten Mengen N aus $\bar{\alpha}$ gilt, so ist es vorläufig noch ungeklärt, ob die vollbeschränkten Mengen mit den st-beschränkten identisch sind.

Den schärfsten Beschränktheitsbegriff erhält man, wenn man verlangt, daß in jeder Restklasse $\hat{\mathfrak{x}}$ von M ein $\mathfrak{x}$ existiert, so daß die Menge aller dieser $\mathfrak{x}$ in λ beschränkt ist. Wir nennen eine Menge, die ein solches beschränktes Urbild hat, *t-beschränkt*.

Satz 1. *In jedem Quotientenraum sind m-, s-, k- und vollbeschränkte Mengen identisch.*

Der Beweis für die Identität der m-beschränkten und der vollbeschränkten Mengen kann fast wörtlich wie für vollkommene Räume selbst geführt werden (KT § 5 Satz 1). Wegen der Vollständigkeit von $\bar{\alpha}$ liegt die dort konstruierte Stelle $\mathfrak{v}=\sum\frac{1}{2^{k_{n-1}}}\mathfrak{u}^{(\nu_n)}$ wieder in $\bar{\alpha}$.

Satz 2. *Ist λ ein Stufenraum, so fallen in jedem Quotientenraum λ/α alle Arten von beschränkten Mengen zusammen.*

Beweis. Es genügt nach Satz 1 zu zeigen, daß eine Menge M aus λ/α, die nicht t-beschränkt ist, auch nicht k-beschränkt ist.

Ist nun M eine nicht t-beschränkte Menge in λ/α, so gibt es nach § 1 Satz 5a zu jedem i eine Restklasse $\hat{\xi}^{(i)} \in M$, so daß die Ungleichungen

$$|x_k^{(i)}| \leqq i c_k^{(i)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

für kein $\xi^{(i)} \in \hat{\xi}^{(i)}$ erfüllt sind.

Die Menge $X^{(i)}$ aller $\frac{1}{i}\xi^{(i)}$ aus $\frac{1}{i}\hat{\xi}^{(i)}$ ist eine schwach abgeschlossene Menge in λ, die $\mathfrak{o}$ nicht enthält. Die Vereinigungsmenge X aller $X^{(i)}$ enthält ebenfalls $\mathfrak{o}$ nicht und ist schwach abgeschlossen. Denn wegen (21) ist nur für $i<n$ der Durchschnitt von $X^{(i)}$ und der Menge C_n aller ξ mit $|x_k| \leqq |c_{k(n)}|$, $k = 1, 2, \ldots$, von Null verschieden, also ist auch $[X, C_n]$ als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen schwach abgeschlossen und damit X selbst.

Nach § 4 Satz 4 gibt es zu X eine beschränkte, schwach kompakte Menge B in λ^*, so daß $\sup_{u \in B} |u\xi| > 1$ für alle $\xi \in X$ ist. Speziell ist also

$$\sup_{u \in B} |u\left(\frac{1}{i}\xi^{(i)}\right)| = \frac{1}{i}\sup_{u \in B} |u\xi^{(i)}| > 1, \text{ d. h. } \inf_{\xi^{(i)} \in \hat{\xi}^{(i)}} \sup_{u \in B} |u\xi^{(i)}| > i,$$

die Folge $\hat{\xi}^{(i)}$ ist daher nicht k-beschränkt.

Satz 3. *Ist λ/α Quotientenraum des Stufenraumes λ, so fallen in λ/α die m- und s-Konvergenz zusammen.*

Beweis. Es sei $\hat{\xi}^{(n)}$ m-konvergent gegen $\hat{\mathfrak{o}}$, aber nicht s-konvergent. Es gibt also eine begrenzte Menge B in $\bar{\alpha}$ und eine Teilfolge $\hat{\xi}^{(m)}$, so daß

$$\sup_{u \in B} |u\hat{\xi}^{(m)}| > c > 0 \quad \text{für alle } m \tag{22}$$

gilt. Die $\hat{\xi}^{(m)}$ bilden als m-konvergente Folge eine m-beschränkte Menge in λ/α, haben nach Satz 2 also eine beschränkte Urbildfolge $\xi^{(m)}$. Nach dem Grenzstellensatz ist eine Teilfolge $\xi^{(j)}$ schwach konvergent gegen eine Stelle $\xi^{(0)}$. Für jedes $u \in \bar{\alpha}$ gilt wegen der m-Konvergenz von $\hat{\xi}^{(j)}$ $u\hat{\xi}^{(j)} \to 0$, es ist also $u\hat{\xi}^{(0)} = 0$ für alle $u \in \bar{\alpha}$. Andererseits folgt aus $\xi^{(j)} \to \xi^{(0)}$ und (22) $\sup_{u \in B} |u\hat{\xi}^{(0)}| > c$, also ein Widerspruch.

Wie in den vollkommenen Räumen selbst erzeugen also die m- und s-Topologie dieselbe Konvergenz, die wir wieder als *schwache Konvergenz* bezeichnen werden.

Satz 4. *λ sei ein Stufenraum. In λ/α gilt der Grenzstellensatz, d. h. jede beschränkte Menge enthält eine schwach konvergente Teilfolge.*

Dies folgt für t-beschränkte Mengen unmittelbar aus dem Grenzstellensatz für λ.

Satz 5. *Jeder Quotientenraum λ/α eines Stufenraumes ist vollständig in bezug auf schwache und st-Konvergenz.*

Beweis. $\hat{\xi}^{(n)}$ sei eine m-konvergente Folge aus λ/α. Es ist also für jedes $u \in \bar{\alpha}$ die Folge $u\hat{\xi}^{(n)}$ konvergent. Wie im Beweis von Satz

3 hat $\hat{\mathfrak{x}}^{(n)}$ eine Teilfolge $\hat{\mathfrak{x}}^{(j)}$, zu der eine gegen eine Stelle $\mathfrak{x}^{(0)} \in \lambda$ konvergente Urbildfolge gehört. Dann ist aber $\hat{\mathfrak{x}}^{(n)}$ auch schwach konvergent gegen $\hat{\mathfrak{x}}^{(0)}$.

Für die *st*-Konvergenz folgt daraus die Vollständigkeit wie für vollkommene Räume (vgl. KT § 5 Satz 3).

Satz 6. *Ist M eine schwach abgeschlossene Menge in dem Quotientenraum λ/α des Stufenraumes λ, so ist M auch s-top. abgeschlossen.*

Beweis. Man bilde zu M die Menge N aller $\mathfrak{x} \in \lambda$ mit $\hat{\mathfrak{x}} \in M$. Wir können wieder voraussetzen, daß M $\hat{\mathfrak{o}}$ nicht enthält. Dann enthält N die Stelle $\mathfrak{o}$ nicht. N ist ferner ebenfalls schwach abgeschlossen. Denn konvergiert $\mathfrak{x}^{(n)}$ schwach gegen $\mathfrak{x}$, so auch $\hat{\mathfrak{x}}^{(n)}$ gegen $\hat{\mathfrak{x}}$, $\hat{\mathfrak{x}}$ ist in M, also $\mathfrak{x}$ in N. Nach § 4 Satz 4 gibt es eine begrenzte Menge B in λ^*, so daß $\sup_{\mathfrak{u} \in B} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}| > 1$ ist für alle $\mathfrak{x} \in N$. Dann ist aber auch $\inf_{\mathfrak{x} \in \hat{\mathfrak{x}}} \sup_{\mathfrak{u} \in B} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \geqq 1$, in der *s*-Umgebung $\inf_{\mathfrak{y} \in \hat{\mathfrak{o}}} \sup_{\mathfrak{u} \in B} |\mathfrak{u}\mathfrak{y}| < 1$ liegt also kein Element aus M, $\hat{\mathfrak{o}}$ ist also nicht *s*-Häufungsstelle von M.

Satz 7. *Ist λ ein Stufenraum, so besitzt jede schwach konvergente Folge aus λ/α eine schwach konvergente Repräsentantenfolge.*

Beweis. $\hat{\mathfrak{x}}^{(n)}$ sei schwach konvergent gegen $\hat{\mathfrak{o}}$. Wie im Beweise von Satz 3 gezeigt wurde, haben die $\hat{\mathfrak{x}}^{(n)}$ eine beschränkte Repräsentantenfolge $\mathfrak{x}^{(n)}$. Es gibt also eine beschränkte Menge M in λ, in der die schwach abgeschlossene Hülle der Menge der $\mathfrak{x}^{(n)}$ liegt.

B sei eine begrenzte Menge aus λ^*. Da $\hat{\mathfrak{x}}^{(n)}$ *s*-konvergent gegen $\hat{\mathfrak{o}}$ ist, gilt

$$\inf_{\mathfrak{z} \in \alpha} \sup_{\mathfrak{u} \in B} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{z})| \to 0. \tag{23}$$

$[\alpha, M]$ sei der Durchschnitt von α und M. Wir behaupten, daß auch

$$\inf_{\mathfrak{z} \in [\alpha, M]} \sup_{\mathfrak{u} \in B} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{z})| \to 0 \tag{24}$$

gilt. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Teilfolge $\mathfrak{x}^{(j)}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\inf_{\mathfrak{z} \in [\alpha, M]} \sup_{\mathfrak{u} \in B} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(j)} - \mathfrak{z})| > \varepsilon, \; j = 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Die Folge $\mathfrak{x}^{(j)}$ kann wegen des Grenzstellensatzes als schwach konvergent angenommen werden, ihr Limes sei $\mathfrak{x}^{(0)}$. Wegen $\hat{\mathfrak{x}}^{(j)} \to \hat{\mathfrak{o}}$ liegt $\mathfrak{x}^{(0)}$ in α und nach der Definition von M in $[\alpha, M]$. Es ist also $\sup_{\mathfrak{u} \in B} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(j)} - \mathfrak{x}^{(0)})| \to 0$ im Widerspruch zu (25). Damit ist (24) bewiesen.

$\mathfrak{v} = \{v_1, v_2, \ldots\}$ sei eine Stelle aus λ^*, deren Koordinaten alle > 0 sind (man findet eine solche Stelle leicht als Lösung der Ungleichungen $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(i)}|\,|v_k| < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{a}^{(i)}$ die Leitstellen von λ). Dann ist die

Menge aller $v_k \mathfrak{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, eine begrenzte Menge in λ^*. Mit dieser Menge B wird $\sup_{u \in B} |u\mathfrak{y}| = \sup_k v_k |y_k|$.

Aus (24) folgt nun für dieses B die Existenz einer Folge $\mathfrak{z}^{(n)} \in [\alpha, M]$ mit

$$\sup_k v_k |x_k^{(n)} - z_k^{(n)}| \to 0. \tag{26}$$

Daraus schließt man, daß die Folge $\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{z}^{(n)}$ koordinatenweise gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert. Da $\mathfrak{x}^{(n)}$ und $\mathfrak{z}^{(n)}$ in M liegen, ist sie außerdem beschränkt. Nach KT § 5 Satz 6 ist sie daher schwach konvergent gegen $\mathfrak{o}$.

§ 6.

Homomorphe Abbildungen.

Die in den vorigen Paragraphen erhaltenen Ergebnisse gestatten es, die in K 5 § 4 erhaltenen Sätze über homomorphe Abbildungen im Fall der Stufenräume wesentlich zu verschärfen.

$\mathfrak{A}$ sei im folgenden stets eine Matrix, die den Stufenraum λ in den Stufenraum μ abbildet. Die transponierte Matrix $\mathfrak{A}'$ bildet dann den gestuften Raum μ^* in den gestuften Raum λ^* ab.

Nach dem Vorbild der Theorie der metrischen Räume[10]) beweisen wir

Satz 1. *Ist $\mathfrak{A}(\lambda)$ t-abgeschlossen, so ist $\mathfrak{A}$ beschränkt umkehrbar.*

Wir schicken dem Beweis einen Hilfssatz voraus. λ sei vollkommen, λ_M der zur beschränkten, normalen, kompletten Menge M aus λ nach § 3 Satz 4 gehörige metrische Teilraum von λ. Mit $K_r^{(M)}$ bezeichnen wir die Kugel $|\mathfrak{x}|_M < r$ um $\mathfrak{o}$ in λ_M.

Ist N eine beschränkte absolut konvexe Menge in μ, so bezeichne $Q_r^{(N)}$ die Menge aller $\mathfrak{y} \in \mathfrak{A}(\lambda)$ mit $|\mathfrak{y}|_N < r$. Unter einer in $Q_r^{(N)}$ dichten Menge verstehen wir eine im Sinn der Metrik von μ_N in $Q_r^{(N)}$ dichte Menge. Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Hilfssatz 1. *Das Bild $\mathfrak{A}(K_1^{(M)})$ enthalte eine in $Q_1^{(N)}$ dichte Menge A. Dann enthält $\mathfrak{A}(K_1^{(M)})$ ganz $Q_1^{(N)}$. $Q_1^{(N)}$ besitzt daher in λ eine beschränkte Urbildmenge.*

Beweis. $\mathfrak{y}^{(0)}$ sei in $Q_1^{(N)}$, also $|\mathfrak{y}^{(0)}|_N < k_1 < 1$. Es sei $k_i > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} k_i = k < 1$. Da $\left|\frac{\mathfrak{y}^{(0)}}{k_1}\right|_N < 1$ ist, gibt es nach Voraussetzung ein $\mathfrak{z}^{(1)} \in A$ mit $\left|\frac{\mathfrak{y}^{(0)}}{k_1} - \mathfrak{z}^{(1)}\right|_N < \frac{k_2}{k_1}$, also $|\mathfrak{y}^{(0)} - k_1 \mathfrak{z}^{(1)}|_N < k_2$. Allgemein findet man ein $\mathfrak{y}^{(n)} = k_1 \mathfrak{z}^{(1)} + \ldots + k_n \mathfrak{z}^{(n)}$, $\mathfrak{z}^{(i)} \in A$, so daß $|\mathfrak{y}^{(0)} - \mathfrak{y}^{(n)}|_N < k_{n+1}$ ist. $\mathfrak{z}^{(i)}$ hat die Form $\mathfrak{z}^{(i)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(i)}$ mit $|\mathfrak{x}^{(i)}|_M < 1$. Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} k_i \mathfrak{x}^{(i)}$ konvergiert

[10]) Wir schließen uns eng an die Darstellung bei F. HAUSDORFF an. Journ. reine angew. Math. **167** (1931). S. 294—311. Hauptsatz 1.

nach § 3 Satz 4 im Sinn der Metrik in λ_M gegen eine Stelle $\mathfrak{x}^{(0)} \in M$, wegen der t-Stetigkeit von $\mathfrak{A}$ (§ 3 Satz 5) ist also $\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \mathfrak{z}^{(i)} = \mathfrak{y}^{(0)}$.

Beweis von Satz 1. $\mathfrak{A}(\lambda)$ sei t-abgeschlossen. $K_r^{(n)}$ sei die Menge aller $\mathfrak{x} \in \lambda$ mit $|x_k| < r\, c_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $c_k^{(n)}$ die in § 1 eingeführten Stufen von λ. Sind $\tilde{c}^{(n)}$ die entsprechenden Stufen in μ, so sei $Q_r^{(n)}$ wie oben die Menge der durch $r\tilde{c}^{(n)}$ majorisierten Stellen aus $\mathfrak{A}(\lambda)$, $Q_r^{(n)}(\mathfrak{y}^{(0)})$ die Menge aller $\mathfrak{y}^{(0)} + \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z} \in Q_r^{(n)}$.

Wir zeigen nun: *Zu jedem m gibt es eine natürliche Zahl n, ein $r > 0$ und ein $\mathfrak{y}^{(0)} \in Q_1^{(m)}$, so daß $\mathfrak{A}(K_1^{(n)})$ in $Q_r^{(m)}(\mathfrak{y}^{(0)})$ dicht ist.*

Die Behauptung sei für $Q_1^{(m)}$ falsch. Da $\mathfrak{A}(K_1^{(1)})$ nicht in $Q_{r_1}^{(m)}$ dicht ist, gibt es in $Q_1^{(m)}$ eine Kugel $Q_{r_1}^{(m)}(\mathfrak{y}^{(1)})$ von einem Radius $r_1 < \frac{1}{2}$ um eine Stelle $\mathfrak{y}^{(1)} \in Q_1^{(m)}$, in der keine Stelle aus $\mathfrak{A}(K_1^{(1)})$ liegt. In $Q_{r_1}^{(m)}(\mathfrak{y}^{(1)})$ gibt es eine Kugel $Q_{r_2}^{(m)}(\mathfrak{y}^{(2)})$ von einem Radius $r_2 < \frac{1}{3}$, die keine Stelle aus $\mathfrak{A}(K_1^{(2)})$ enthält usf.

Die Folge $\mathfrak{y}^{(i)}$ konvergiert im Sinn der Metrik von $\mu_{\tilde{c}^{(m)}}$ gegen eine Stelle $\mathfrak{y}^{(0)}$, die in allen $Q_{r_i}^{(m)}(\mathfrak{y}^{(i)})$, also in $Q_1^{(m)}$ liegt, aber in keinem $\mathfrak{A}(K_1^{(i)})$, daher nicht in $\mathfrak{A}(\lambda)$. Andererseits müßte $\mathfrak{y}^{(0)}$ als t-Limes der Folge $\mathfrak{y}^{(i)} \in \mathfrak{A}(\lambda)$ wegen der t-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}(\lambda)$ zu $\mathfrak{A}(\lambda)$ gehören. —

Es sei nun $\mathfrak{y}^{(0)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(0)}$. Die Kugel $K_1^{(n')}(\mathfrak{x}^{(0)})$ enthält für genügend großes n' ganz $K_1^{(n)} = K_1^{(n)}(\mathfrak{o})$, ihr Bild ist also in $Q_r^{(m)}(\mathfrak{y}^{(0)})$ dicht. Daraus folgt, daß $\mathfrak{A}(K_1^{(n')}$ in $Q_r^{(m)}$ dicht ist, nach Hilfssatz 1 umfaßt dann aber $\mathfrak{A}(K_1^{(n')})$ ganz $Q_r^{(m)}$, die beschränkte Menge $Q_r^{(m)}$ hat also ein beschränktes Urbild. Da dies für alle m und offenbar für alle r gilt, ist $\mathfrak{A}$ beschränkt umkehrbar.

Satz 2. *Für beliebige vollkommene Räume λ, μ gilt, daß jede beschränkt umkehrbare Abbildung $\mathfrak{A}$ von λ in μ t-stetig umkehrbar ist.*

Beweis. $\mathfrak{A}$ bilde λ in μ ab. $\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ sei t-konvergent gegen $\mathfrak{o}$, also $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}|_N \to 0$ für eine beschränkte Menge N in μ. Die wie in Hilfssatz 1 erklärte Menge $Q_1^{(N)}$ hat nach Voraussetzung in einer Kugel $K_1^{(M)}$ ein Urbild, die Menge $Q_r^{(N)}$ also in $K_r^{(M)}$. Aus $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}|_N \to 0$ folgt, daß für gegebenes $\varepsilon > 0$ die $\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}$ von n_0 ab in $Q_\varepsilon^{(N)}$ liegen, für eine geeignete Urbildfolge liegen daher die $\mathfrak{x}^{(n)}$ von n_0 ab in $K_\varepsilon^{(M)}$, d. h. $\mathfrak{x}^{(n)}$ ist t-konvergent gegen $\mathfrak{o}$.

Satz 3. Jede t-stetig umkehrbare Abbildung $\mathfrak{A}$ des Stufenraumes λ in den Stufenraum μ ist eine s-stetig umkehrbare Abbildung von $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ auf $\mathfrak{A}(\lambda)$.

Beweis[11]). Die Matrix $\mathfrak{A}$ erzeugt eine eineindeutige und s-top. stetige Abbildung von $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ auf $\mathfrak{A}(\lambda)$ ($\nu_{\mathfrak{A}}$ ist der Nullraum von $\mathfrak{A}$).

[11]) Zur folgenden Schlußweise vgl. H § 3 Satz 1.

Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es eine Folge $\hat{\xi}^{(n)} \in \lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$, deren Bildfolge $\mathfrak{A}\xi^{(n)}$ schwach gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert, während $\hat{\xi}^{(n)}$ nicht schwach gegen $\hat{\mathfrak{o}}$ geht. Die Folge $\hat{\xi}^{(n)}$ kann nicht beschränkt sein in $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ (vgl. § 5 Satz 2), denn sonst gäbe es nach § 5 Satz 4 eine Teilfolge mit einem von $\hat{\mathfrak{o}}$ verschiedenen s-Limes $\hat{\xi}$. Das wäre aber ein Widerspruch zur s-Stetigkeit und Eineindeutigkeit der Abbildung, denn sowohl $\hat{\mathfrak{o}}$ wie $\hat{\xi}$ hätten als Bild $\mathfrak{o}$.

Da $\hat{\xi}^{(n)}$ nicht beschränkt ist, gibt es ein $u \in \bar{\alpha}$ und eine Teilfolge $\hat{\xi}^{(n_k)}$, so daß $|u\hat{\xi}^{(n_k)}| > k^3$ ist, $k = 1, 2, \ldots$. Die Folge $\frac{1}{k}\hat{\xi}^{(n_k)}$ hat als Bildfolge $\frac{1}{k}\mathfrak{A}\xi^{(n_k)}$. Da $\mathfrak{A}\xi^{(n)}$ schwach gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert, ist $\mathfrak{A}\xi^{(n)}$ sicher beschränkt, also $|\mathfrak{A}\xi^{(n)}|_M < 1$ für eine geeignete beschränkte Menge M, also $\left|\frac{1}{k}\mathfrak{A}\xi^{(n_k)}\right|_M < \frac{1}{k}$, d. h. $\frac{1}{k}\mathfrak{A}\xi^{(n_k)}$ ist t-konvergent gegen $\mathfrak{o}$. Nach Voraussetzung ist dann aber eine Urbildfolge $\frac{1}{k}\xi^{(n_k)}$ t-konvergent gegen $\mathfrak{o}$, was ein Widerspruch zur Unbeschränktheit von $\frac{1}{k}\hat{\xi}^{(n_k)}$ ist.

Satz 4. *$\mathfrak{A}$ erzeuge eine s-stetig umkehrbare Abbildung von $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ auf $\mathfrak{A}(\lambda)$. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein s-Homomorphismus.*

Beweis. Die Voraussetzung besagt: Aus $\hat{\xi}^{(n)} \xrightarrow{s} \hat{\mathfrak{o}}$ folgt $\mathfrak{A}\xi^{(n)} \to \mathfrak{o}$ und umgekehrt. In § 4 Satz 4 wurde bewiesen, daß jede in bezug auf s-Limesbildung abgeschlossene Menge in μ bereits alle ihre s-Häufungsstellen enthält. Wörtlich wie in K 3 § 2 Satz 3 folgt jetzt, daß die Abbildung $\mathfrak{A}\xi \to \hat{\xi}$ auch s-Häufungsstellen-treu ist. Nach K 3 § 2 Satz 2 ist sie dann im Sinn der s-Topologie von $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ stetig, d. h. $\mathfrak{A}$ ist ein s-Homomorphismus.

Satz 5. *Ist $\mathfrak{A}$ ein m- oder s-Homomorphismus, so ist $\mathfrak{A}(\lambda)$ orthogonalabgeschlossen.*

Beweis. Der Quotientenraum $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ ist nach § 5 Satz 5 schwach vollständig. Also ist auch das Bild $\mathfrak{A}(\lambda)$ von $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ schwach vollständig. § 4 Satz 5 ergibt die Behauptung.

Bemerkung. Daraus folgt umgekehrt eine Verschärfung von § 5 Satz 5 für die Quotientenräume vom Typus $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}$ ein s-Homomorphismus. $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ ist s-top. isomorph zu dem s-top. abgeschlossenen $\mathfrak{A}(\lambda)$, $\mathfrak{A}(\lambda)$ ist nach K 4 § 3 Satz 2 s-top. vollständig, daher ist auch $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}}$ s-top. vollständig.

Satz 6. *In einem Stufenraum λ ist jeder Bildraum, der t-abgeschlossen ist, bereits orthogonalabgeschlossen. Ein linearer Teilraum von λ, der t-abgeschlossen, aber nicht orthogonalabgeschlossen ist, hat also nicht die Form $\mathfrak{A}(\lambda)$.*

Denn ist $\mathfrak{A}(\lambda)$ t-abgeschlossen, so ist $\mathfrak{A}$ nach Satz 1 beschränkt umkehrbar, nach Satz 2 t-stetig umkehrbar, also ist nach Satz 3, 4 und 5 $\mathfrak{A}(\lambda)$ orthogonalabgeschlossen.

Der Raum der Nullfolgen bildet einen linearen stark abgeschlossenen Teilraum α von σ_∞, dessen orthogonalabgeschlossene Hülle gleich σ_∞ ist, α kann also nicht Bildraum sein.

Satz 7. *λ, μ seien beliebig vollkommen. Ist $\mathfrak{A}$ schwach kompakt umkehrbar, so ist $\mathfrak{A}(\lambda)$ schwach abgeschlossen.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}\xi^{(n)}$ schwach konvergent. Die $\mathfrak{A}\xi^{(n)}$ bilden eine schwach kompakte Menge, also gibt es eine schwach kompakte Urbildmenge $\xi^{(n)}$. Eine Teilfolge $\xi^{(j)}$ konvergiere gegen $\xi^{(0)}$. Dann ist auch $\mathfrak{A}\xi^{(j)} \to \mathfrak{A}\xi^{(0)}$. $\mathfrak{A}\xi^{(0)}$ ist dann auch schwacher Limes von $\mathfrak{A}\xi^{(n)}$, der also in $\mathfrak{A}(\lambda)$ liegt.

Aus den eben gewonnenen Resultaten und den Ergebnissen von K 5 § 4 erhalten wir die folgenden Kennzeichnungen der homomorphen Abbildungen von Stufenräumen.

Hauptsatz. *$\mathfrak{A}$ sei eine Matrix, die den Stufenraum λ in den Stufenraum μ abbildet. $\mathfrak{A}'$ die transponierte Abbildung von μ^* in λ^*. Die folgenden Eigenschaften sind sämtlich miteinander äquivalent:*

a) *$\mathfrak{A}$ ist beschränkt umkehrbar (oder begrenzt oder schwach kompakt umkehrbar),*
b) *$\mathfrak{A}$ ist t-stetig umkehrbar,*
c) *$\mathfrak{A}$ ist s-stetig umkehrbar,*
d) *$\mathfrak{A}$ ist ein s-Homomorphismus,*
e) *$\mathfrak{A}$ ist ein m-Homomorphismus,*
f) *$\mathfrak{A}(\lambda)$ ist t-abgeschlossen,*
g) *$\mathfrak{A}(\lambda)$ ist orthogonalabgeschlossen (oder schwach abgeschlossen, vgl. § 4 Satz 5),*
h) *$\mathfrak{A}'$ ist schwach kompakt umkehrbar,*
i) *$\mathfrak{A}'$ ist ein s- oder st-Homomorphismus,*
j) *$\mathfrak{A}'$ ist ein m-Homomorphismus,*
k) *$\mathfrak{A}'(\mu^*)$ ist stark oder schwach abgeschlossen,*
l) *$\mathfrak{A}'(\mu^*)$ ist orthogonalabgeschlossen.*

Beweis. Aus a) folgt b) nach Satz 2, daraus nach Satz 3 und 4 die Eigenschaft d), hieraus nach Satz 5 g). Aus g) folgt unmittelbar f), aus f) nach Satz 1 wieder a), also sind a), b), d), f), g) untereinander äquivalent.

g) ist nach K 5 § 4 Satz 2 mit j) gleichbedeutend. Nach § 2 Satz 1 ist a) mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{A}$ schwach kompakt umkehrbar ist, äquivalent. Da mit a) auch g) gilt, folgt nach K 5 § 4 Satz 3, daß auch i) mit den übrigen Eigenschaften äquivalent ist.

Wiederum nach K 5 § 4 Satz 3 folgen aus d) die Eigenschaften h) und l). l) ist nach K 5 § 4 Satz 2 mit e) gleichwertig. Aus l) folgt ferner k), daraus nach § 4 Satz 5 wieder l). Aus e) folgt nach Satz 5 g), also sind e), k) und l) auch mit den übrigen Eigenschaften äquivalent. Dasselbe gilt für h), da aus h) nach Satz 7 k) folgt. Schließlich folgt aus c) die schwache Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}(\lambda)$, also g), umgekehrt folgt c) aus d) nach § 5 Satz 7.

In der Liste der äquivalenten Eigenschaften fehlen die drei

m) $\mathfrak{A}$ ist ein *st*-Homomorphismus,

n) $\mathfrak{A}'$ ist beschränkt umkehrbar,

o) $\mathfrak{A}'$ ist stark stetig umkehrbar.

Aus n) folgt nach Satz 2 o), daraus sofort k). Aus m) folgt wegen der *s*-Vollständigkeit von $\lambda/\nu_{\mathfrak{A}'}$ leicht f), also sind m), n) und o) hinreichend für das Vorliegen der Eigenschaften des Hauptsatzes.

Ob sie andererseits stets daraus folgen, ist noch ungeklärt. Für n) und o) hängt dies mit der Frage zusammen, ob in den Quotientenräumen λ^*/α eines gestuften Raumes jede *st*-beschränkte Menge auch *t*-beschränkt ist.

Ist dies der Fall, so folgt n) und damit o) aus h): Wir brauchen nur zu zeigen, daß das Urbild U jeder beschränkten Menge von Stellen $\mathfrak{A}'\mathfrak{u}$ in $\lambda^*/\nu_{\mathfrak{A}}$ *m*-beschränkt und damit *t*-beschränkt ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $\mathfrak{a} \in \bar{\nu}_{\mathfrak{A}'}$, dazu eine Folge $\hat{\mathfrak{u}}^{(i)}$ in U, so daß $|\mathfrak{a}\hat{\mathfrak{u}}^{(i)}| > i^2$ wäre. Die Folge $\frac{1}{i}\mathfrak{A}'\mathfrak{u}^{(i)}$ würde eine schwach kompakte Menge in μ bilden, also ein schwach kompaktes Urbild in λ haben, was $\left|\mathfrak{a}\left(\frac{1}{i}\hat{\mathfrak{u}}^{(i)}\right)\right| > i$ widerspricht.

§ 7.

Beispiele und Anwendungen.

Wir beginnen mit dem in der Einleitung genannten klassischen Beispiel.

Es seien $w_1, w_2, \ldots$ komplexe Zahlen mit $0 \leqq |w_1| \leqq |w_2| \leqq \ldots$, $\lim_{i\to\infty} w_i = \infty$. Wir betrachten die unendliche Matrix

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} 1 & w_1 & w_1^2 & . & . \\ 1 & w_2 & w_2^2 & . & . \\ 1 & w_3 & w_3^2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Nach § 1 Beispiel 2 ist der von den Zeilen $\mathfrak{w}^{(i)} = \{1, w_i, w_i^2, \ldots\}$ erzeugte Stufenraum gleich dem Raum ϱ. Ist $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus π, also das Koeffizientensystem einer ganzen transzendenten Funktion $f(z)$, so ist $\mathfrak{W}\mathfrak{u}$ der Vektor $\{f(w_1), f(w_2), \ldots\}$. $\mathfrak{W}$ bildet also $\varrho^* = \pi$ in ω ab, $\mathfrak{W}'$ daher φ in ϱ.

Es gilt nun: *Die Gleichung* $\mathfrak{W}'\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ *ist in* φ *unlösbar,* $\mathfrak{W}'(\varphi)$ *ist abgeschlossen in* ϱ.

Beweis. Die erste Aussage ist sofort einzusehen, denn $\mathfrak{W}'\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ bedeutet die lineare Abhängigkeit von endlich vielen Zeilen von $\mathfrak{W}$, was dem Nichtverschwinden des zugehörigen Differenzenprodukts der w_i widerspricht.

Die zweite Aussage beweisen wir zuerst für den Fall $|w_1| < |w_2| < \dots$. Eine Menge X in ϱ ist dann und nur dann beschränkt, wenn für ein k und alle $\mathfrak{x} \subset X$ $|x_i| \leqq |w_k|^i$, $i = 1, 2, \dots$, d. h. $\sup_i \sqrt[i]{|x_i|} \leqq |w_k|$ gilt. Nun ist wegen $|w_1| < |w_2| < \dots$ $\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|\sum_1^r a_i w_i^n|} = |w_r|$, wenn $a_r \neq 0$ ist. Eine Menge von Stellen $\sum_1^r a_i \mathfrak{w}^{(i)}$ aus $\mathfrak{W}'(\varphi)$ ist also nur dann beschränkt, wenn r beschränkt ist. Eine Folge von Stellen $\sum_1^{r_n} a_i^{(n)} \mathfrak{w}^{(i)}$ aus $\mathfrak{W}'(\varphi)$ ist daher nur dann konvergent, wenn $r_n \leqq r_0$ ist. Dann muß aber $\lim_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a_i^{(0)}$ für jedes i existieren und es liegt $\lim_{n\to\infty} \sum_1^{r_n} a_i^{(n)} \mathfrak{w}^{(i)} = \sum_1^{r_0} a_i^{(0)} \mathfrak{w}^{(i)}$ in $\mathfrak{W}'(\varphi)$, also ist $\mathfrak{W}'(\varphi)$ abgeschlossen.

Im allgemeinen Fall $|w_1| \leqq |w_2| \leqq \dots$ können wir analog schließen, wenn wir gezeigt haben, daß in jeder Stelle $\mathfrak{z} = \sum_{j=p+1}^{p+q} b_j \mathfrak{w}^{(j)}$ mit $|w_{p+1}| = \dots = |w_{p+q}| = c$ eine unendliche Teilfolge von Koordinaten z_k mit $|z_k| \geqq \delta c^k$, $k = n_1, n_2, \dots$, existiert.

Es genügt, den Fall $c = 1$, also alle w_j Einheitswurzeln, zu betrachten. Aus den q Beziehungen

$$z_{m+e} = \sum_{j=p+1}^{p+q} b_j w_j^{m+e}, \quad e = 0, 1, \dots, q-1,$$

ergeben sich nach der CRAMERschen Regel die b_j in der Gestalt

$$b_j = \frac{\sum_{e=0}^{q-1} z_{m+e} D_e^{(j)}}{D \prod_{i=p+1}^{p+q} w_i^m}, \quad j = p+1, \dots, p+q,$$

wobei D das Differenzenprodukt der w_j, $j = p+1, \dots, p+q$, ist, die $D_e^{(j)}$ Determinanten aus Einheitswurzeln sind. Daraus ergibt sich

$$|b_j| \leqq K \sum_{l=0}^{q-1} |z_{m+e}|$$

mit einer von m unabhängigen Konstanten K. Ist $b_i \neq 0$, so ist unter q aufeinanderfolgenden $|z_{m+e}|$ also wenigstens eines $\geqq \frac{|b_i|}{qK} = \delta > 0$.

Aus dem Hauptsatz folgt nun sofort, daß $\mathfrak{W}'$ *ein s-Isomorphismus ist,* $\mathfrak{W}'(\varphi)$ *ist also ein s-isomorphes Bild von* φ *in* ϱ. *Ferner ist* $\mathfrak{W}(\pi)$ *gleich ganz* ω. Das Gleichungssystem

$$\mathfrak{W}\mathfrak{u} = \mathfrak{c}$$

ist also für jede rechte Seite $\mathfrak{c}$ durch ein $\mathfrak{u} \in \pi$ lösbar, d. h. es gibt

eine ganze transzendente Funktion $f(z)$, die an den Stellen $w_1, w_2, \ldots$ die beliebig vorgeschriebenen Werte $f(w_i) = c_i$ annimmt.

$\mathfrak{W}'(\varphi)$ *besitzt keinen Komplementärraum in* ϱ[12]).

Beweis. $\alpha = \mathfrak{W}'(\varphi)$ ist ein orthogonalabgeschlossener, echter Teilraum von ϱ. Wir nehmen an, daß α einen Komplementärraum besitzt, $\varrho = \alpha \oplus \beta$[13]). Wir betrachten die Zerlegung der e_i,

$$e_i = \mathfrak{y}^{(i)} + \mathfrak{z}^{(i)}, \quad \mathfrak{y}^{(i)} \in \alpha, \quad \mathfrak{z}^{(i)} \in \beta.$$

Die Folge e_i konvergiert gegen $\mathfrak{o}$ in ϱ, also konvergiert nach Definition des Komplementärraumes auch $\mathfrak{y}^{(i)}$ gegen $\mathfrak{o}$. Wegen der Isomorphie von α zu φ ist dies nur so möglich, daß die $\mathfrak{y}^{(i)}$ Linearkombinationen von endlich vielen festen $\mathfrak{w}^{(i)}$ sind, etwa $\mathfrak{w}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{w}^{(t)}$. Dann ist $\mathfrak{w}^{(t+1)}$ Limes seiner Abschnitte $\mathfrak{w}_n^{(t+1)} = \sum_{i=1}^{n} w_{t+1}^{i-1} e_i = \sum_{1}^{n} w_{t+1}^{i-1} \mathfrak{y}^{(i)} + \sum_{1}^{n} w_{t+1}^{i-1} \mathfrak{z}^{(i)}$. Der erste Summand muß mit $n \to \infty$ den Limes $\mathfrak{w}^{(t+1)}$ haben, denn $\mathfrak{w}^{(t+1)} = \mathfrak{w}^{(t+1)} + \mathfrak{o}$ ist die Zerlegung von $\mathfrak{w}^{(t+1)}$. Nach dem eben Bewiesenen ist aber $\sum_{1}^{n} w_{t+1}^{i-1} \mathfrak{y}^{(i)}$ für jedes n eine Linearkombination von $\mathfrak{w}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{w}^{(t)}$. $\mathfrak{w}^{(t+1)}$ ist aber nicht Limes von solchen Linearkombinationen.

Nach den Resultaten von E. Hagemann (vgl. H § 2 Satz 1 und 2) besitzt $\mathfrak{W}'$ daher keine linke Reziproke, es gibt also keine Matrix $\mathfrak{B}$, die ω in π überführt, so daß $\mathfrak{W}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ ist. Es ist daher unmöglich, eine das Gleichungssystem $\mathfrak{W}\mathfrak{u} = \mathfrak{c}$ lösende Matrix $\mathfrak{B}$ zu finden, so daß für jedes $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{u} = \mathfrak{B}\mathfrak{c}$ die Lösung ist.

Es läßt sich jetzt auch leicht ein Beispiel für einen vollkommenen Raum angeben, in dem es einen s-Isomorphismus in sich ohne linke Reziproke gibt. Es sei $\varrho + \varphi$ der in § 1 Beispiel 4 betrachtete Raum der Funktionen, die in O einen Pol haben. Da $\varrho + \varrho$, also der Raum der Stellen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\mathfrak{x} \in \varrho$, $\mathfrak{y} \in \varrho$, wieder gleich ϱ ist, kann man $\varrho + \varphi$ auch als $\varrho + \varrho + \varphi$ schreiben. Wir bilden nun $\varrho + \varphi$ so in sich ab, daß wir ϱ identisch in ein ϱ von $\varrho + \varrho + \varphi$ abbilden, φ aber vermittels $\mathfrak{W}'$ in das andere ϱ. Dann ist die so erklärte Abbildung offenbar ein s-Isomorphismus von $\varrho + \varphi$ in sich. Der Bildraum hat, was analog wie oben zu beweisen ist, keinen Komplementärraum, also *hat die die Abbildung darstellende Matrix aus* $\sum(\varrho + \varphi)$ *keine linke Reziproke.*

Bereits in H § 7 wurde ein Beispiel für eine Matrix aus $\sum(\varphi\omega + \omega\varphi)$ angegeben, die eine eineindeutige und s-stetig umkehrbare Abbildung darstellt, aber keine linke Reziproke besitzt. Diese Abbildung ist jedoch kein s-Isomorphismus, es läßt sich sogar zeigen, daß in $\varphi\omega + \omega\varphi$ jeder s-Isomorphismus eine linke Reziproke besitzt. Es war also noch

[12]) Dies wurde von O. Toeplitz und mir 1937 bewiesen, das Beispiel in $\varrho + \varphi$ im Anschluß daran von mir aufgestellt.

[13]) Zum Begriff des Komplementärraumes vgl. H § 2.

die Frage offen, ob das Reziprokentheorem in dieser verschärften Fassung vielleicht allgemein richtig ist. Sie ist nun durch das obige Beispiel negativ entschieden. Aber nicht in allen Stufenräumen ist das Reziprokentheorem falsch. Es gilt in φ, und, wie in K 3 bewiesen wurde, auch in σ_∞.

M. EIDELHEIT hat das Gleichungssystem $\mathfrak{W}\mathfrak{u} = \mathfrak{c}$ als Spezialfall des folgenden Theorems behandelt,

Satz 1. *Das unendliche Gleichungssystem*

$$(27) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{u} = \mathfrak{v} \quad \textit{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} u_k = v_k, \quad i = 1, 2, \ldots$$

ist dann und nur dann für jede rechte Seite $\mathfrak{v}$ *durch ein* $\mathfrak{u}$ *lösbar, für das die linken Seiten von* (27) *absolut konvergieren, wenn*

1.) *die Zeilen* $\mathfrak{a}^{(i)}$ *der Matrix* $\mathfrak{A}$ *linear unabhängig sind,*

2.) *es zu jeder natürlichen Zahl* p *eine ebensolche* n_p *gibt,*

so daß aus

$$(28) \qquad |\sum_{1}^{n} c_k a_{kt}| \leqq M \sum_{r=1}^{p} |a_{rk}| = M b_t^{(p)} \textit{ für alle } t = 1, 2, \ldots$$

stets $n \leqq n_p$ *folgt. Dabei sind die* c_k *irgend welche komplexe Zahlen,* $M > 0$ *beliebig*[14]).

Beweis. a) *Notwendig.* Die $\mathfrak{a}^{(i)}$ erzeugen einen Stufenraum λ. Daß (27) für jede rechte Seite lösbar ist, bedeutet, daß $\mathfrak{A}$ eine Abbildung von λ^* auf ganz ω ist, also $\mathfrak{A}(\lambda^*) = \omega$ gilt. $\mathfrak{A}(\lambda^*)$ ist also orthogonalabgeschlossen. Der Orthogonalraum von ω ist $\mathfrak{o}$, daher müssen die Zeilen $\mathfrak{a}^{(i)}$ linear unabhängig sein.

(28) bedeutet, daß $\sum_{1}^{n} c_k \mathfrak{a}^{(k)}$ in $\lambda_{\mathfrak{a}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(p)}} = \lambda_{b^{(p)}}$ liegt. Ist 2.) nicht erfüllt, so gibt es also ein p und dazu eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)} = \sum_{1}^{m_n} c_k^{(n)} \mathfrak{a}^{(k)}$ mit $m_n \to \infty$ in $\lambda_{b^{(p)}}$, $c_{m_n}^{(n)} \neq 0$ und $|x_t^{(n)}| \leqq M b_t^{(p)}$ für alle t. Man kann nun Zahlen $b_n \to 0$ angeben, so daß $b_n \mathfrak{x}^{(n)} \xrightarrow{t} \mathfrak{o}$ in $\lambda_{b^{(p)}}$ gilt. Man braucht dazu nur $b_n = \frac{1}{n M}$ zu setzen. Nun folgt aus § 6 Hauptsatz aus der Orthogonalabgeschlossenheit von $\mathfrak{A}(\lambda^*)$, daß $\mathfrak{A}'$ eine t-stetig umkehrbare Abbildung von $\omega^* = \varphi$ in λ ist. Es ist aber

$$\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{A}' \{c_1^{(n)}, \ldots, c_{m_n}^{(n)}, 0, 0, \ldots\} = \mathfrak{A}' \mathfrak{c}^{(n)},$$

aus $b_n \mathfrak{x}^{(n)} \xrightarrow{t} \mathfrak{o}$ folgt also, daß die eindeutig bestimmte Urbildfolge $b_n \mathfrak{c}^{(n)}$ in φ gegen $\mathfrak{o}$ t-konvergiert. Dies ist aber nur möglich, wenn die m_n unter einer von n unabhängigen Schranke n_p liegen, im Widerspruch zur Annahme.

[14]) vgl. E S. 145.

b) *Hinreichend.* Nach dem Hauptsatz genügt es, die t-stetige Umkehrbarkeit von $\mathfrak{A}'$ zu zeigen, denn daraus folgt die Orthogonalabgeschlossenheit von $\mathfrak{A}(\lambda^*)$, aus der sich mit 1.) $\mathfrak{A}(\lambda^*) = \omega$ ergibt.

Nun besitzt $\mathfrak{A}'$ wegen 1.) eine eindeutige Umkehrung. Es sei $\mathfrak{A}'\mathfrak{c}^{(n)}, \mathfrak{c}^{(n)} \in \varphi$, gegen $\mathfrak{o}$ t-konvergent. Dann ist $\mathfrak{A}'\mathfrak{c}^{(n)} = \sum_1^{m_n} c_k^{(n)} \mathfrak{a}^{(k)}$ bereits in einem $\lambda_{b(p)}$ schwach konvergent, also beschränkt, d. h. (28) ist erfüllt. 2.) ergibt, daß die $\mathfrak{c}^{(n)}$ alle eine Länge $\leqq n_p$ haben. Die ersten n_p $\mathfrak{a}^{(i)}$ sind aber linear unabhängig, eine Folge von Linearkombinationen $\sum_{k=1}^{n_p} c_k^{(n)} \mathfrak{a}^{(k)}$ konvergiert also nur dann gegen $\mathfrak{o}$, wenn $\lim_{n\to\infty} c^{(n)} = 0$, $k = 1, \ldots, n_p$ gilt, also $\mathfrak{c}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{o}$ t-konvergent ist.

Damit läßt sich das obige Beispiel zum Komplementärraumproblem ebenfalls verallgemeinern.

Satz 2. *$\mathfrak{A}$ erfülle die Bedingungen* 1.) *und* 2.) *von Satz* 1. *Es gebe ferner eine Folge $c_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$, so daß die Folge $c_j \mathfrak{e}_j$ in dem durch die Zeilen $\mathfrak{a}^{(i)}$ von $\mathfrak{A}$ bestimmten Leitraum λ schwach gegen $\mathfrak{o}$ konvergiert. Dann ist $\alpha = \mathfrak{A}'(\varphi)$ ein zu φ s-isomorpher orthogonalabgeschlossener echter Teilraum von λ, der keinen Komplementärraum besitzt.*

Berücksichtigt man, daß wegen der Existenz der Folge $c_j \mathfrak{e}_j \to \mathfrak{o}$ $\lambda \neq \varphi$ sein muß, so folgt aus KT § 14 Satz 2 Folgerung, daß der zu φ s-isomorphe Teilraum α von λ ein echter Teilraum sein muß. Statt $\mathfrak{e}_j$ nimmt man $c_j \mathfrak{e}_j$ als Folge und geht im übrigen genau so vor wie im Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{W}$.

Die bei Polya l. c. behandelten weiteren funktionentheoretischen Beispiele fallen sämtlich unter den folgenden Satz, der etwas schwächer ist als Polyas Satz II, und sich leicht aus dem Eidelheitschen Satz ableiten läßt.

Satz 3. *Die Matrix $\mathfrak{A}$ enthalte nur linear unabhängige Zeilen und zerfalle in horizontale Schichten $\mathfrak{A}_i$. $\mathfrak{A}_i$ bestehe aus den Zeilen $\mathfrak{a}^{(j)}$, $j = s_{i-1} + 1, \ldots, s_i$. In jeder Schicht gebe es eine unendliche Folge quadratischer Matrizen $\mathfrak{A}_{il}$ mit Inversen $\mathfrak{A}_{il}^{-1}$, deren Spaltenindizes mit l gegen ∞ gehen. Es werde $|\mathfrak{x}| = \sum_i |x_i|$, $|\mathfrak{B}| = \sum_i \sum_k |b_{ik}|$ gesetzt für endliche Vektoren und Matrizen.*

Gilt nun für jedes i, daß

$$\lim_{l\to\infty} |\mathfrak{a}^{(j,l)}||\mathfrak{A}_{il}^{-1}| = 0, \tag{29}$$

falls $\mathfrak{a}^{(j)}$ aus der 1-ten bis $(i-1)$-ten Schicht ist und $\mathfrak{a}^{(j,l)}$ den Ausschnitt aus $\mathfrak{a}^{(j)}$ bedeutet, der aus denselben Spalten wie $\mathfrak{A}_{il}$ besteht, so ist das unendliche Gleichungssystem

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$$

für jedes $\mathfrak{v}$ durch ein $\mathfrak{u}$ lösbar, so daß $\mathfrak{A}\mathfrak{u}$ absolut konvergiert.

Beweis. Ist $\mathfrak{b} = \sum t_j \mathfrak{a}^{(j)}$ eine Linearkombination der Zeilen der ersten bis $(i\text{-}1)$-ten Schicht, so folgt aus (29), daß $|\mathfrak{b}^{(l)}|\ |\mathfrak{A}_{il}^{-1}| \to 0$ geht.

Es sei $\mathfrak{d} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}' = \sum_{s_{i-1}+1}^{s_i} t_k \mathfrak{a}^{(k)}$, die $\mathfrak{a}^{(k)}$ aus der i-ten Schicht, gegeben und es gelte

$$|d_i| \leqq M |r_i|, \; i = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

wobei $\mathfrak{r}$ eine Linearkombination von Stellen der ersten bis $(i\text{-}1)$-ten Schicht sei. Wir bilden $\mathfrak{d}^{(l)} \mathfrak{A}_{il}^{-1} = \mathfrak{b}^{(l)} \mathfrak{A}_{il}^{-1} + \mathfrak{b}'^{(l)} \mathfrak{A}_{il}^{-1}$. Es ist

$$\mathfrak{b}'^{(l)} \mathfrak{A}_{il}^{-1} = \mathfrak{t} = \{t_{s_{i-1}+1}, \ldots, t_{s_i}\}, \tag{31}$$

also ein konstanter Vektor $\neq \mathfrak{o}$. Andererseits ist wegen (30)

$$\lim_{l \to \infty} |\mathfrak{d}^{(l)} \mathfrak{A}_{il}^{-1}| \leqq M \cdot \lim_{l \to \infty} |\mathfrak{r}^{(l)}|\ |\mathfrak{A}_{il}^{-1}| = 0,$$

ebenso $\lim_{l \to \infty} |\mathfrak{b}^{(l)} \mathfrak{A}_{il}^{-1}| = 0$, was (31) widerspricht. Also ist (30) nicht möglich. Nach Satz 1 ist also $\mathfrak{A}\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$ stets lösbar.

(Eingegangen am 2. 1. 1947.)

Ein allgemeiner Mengenisomorphiesatz der Theorie der Verbände.

Von

W. Schwan in Osterwald.

1. Einleitung.

In einer ersten Mitteilung[1]) habe ich gezeigt, daß der „kleine Isomorphiesatz" $a/(a \cap b) \sim (a \cup b)/b$, der bekanntlich für die modularen Verbände charakteristisch ist, aus einem allgemeineren Isomorphiesatz hervorgeht, der sich auf zwei beliebige Elemente eines allgemeinen Verbandes bezieht und nach Einführung zweckmäßiger Bezeichnungen fast ebenso, nämlich $a/(a \wedge b) \sim (a \vee b)/b$ geschrieben werden kann. Die Betrachtung, die zur Aufstellung dieses „allgemeinen kleinen Isomorphiesatzes" führte, ist weitgehender Verallgemeinerung fähig. Ersetzt man nämlich die Transformationen $a \cap z$ *und* $b \cup z$ durch irgend zwei monotone, d. h. Subsumptionen $p =\!\!= q$ nicht zerstörende Transformationen S und T des Verbandes, so ergibt sich, daß die Mengen $[ST]$ und $[TS]$ der Deckelemente der zusammengesetzten Transformationen ST bzw. TS einander isomorph sind (1. Satz). Ob eine Teilbundisomorphie vorliegt, bedarf freilich in jedem konkreten Falle noch der besonderen Untersuchung.

Dieser Mengenisomorphiesatz nimmt eine besonders einfache Fassung an, wenn S und T solche monotone Transformationen des Verbandes sind, die (wie $a \cap z$ und $b \cup z$) eine Halbgruppe von lauter Idempotenten erzeugen (2. Satz).

Ein besonders bemerkenswerter Sonderfall ergibt sich, wenn man den in der ersten Mitteilung benutzten Begriff der Umreichfunktion allgemein faßt (1. Erklärung) und die Isomorphie $[ST] \sim [TS]$ bei solchen monotonen Transformationen S und T untersucht, deren Quotient eine Umreichfunktion ist (3. und 4. Satz). Dieser Sonderfall läßt sich auch mit Hilfe eines Kongruenzbegriffes beschreiben (2. Erklärung und 5. Satz).

2. Der Mengenisomorphiesatz.

2.1. Unter einer Transformation des Verbandes V verstehen wir im folgenden immer eine eindeutige Abbildung von V auf eine Teilmenge von V. Die Transformation Tz von V heißt monoton, wenn aus $z_1 =\!\!= z_2$

[1]) W. Schwan, Perspektivitäten in allgemeinen Verbänden, Math. Zeitschr. **51**, 2.

immer $Tz_1 =(= Tz_2$ folgt. — Zwei gegebene Transformationen Sz und Tz von V werden sich i. A. teilweise umkehren, d. h. es wird i. A. Elementepaare (x, y) geben, die

$$x = Sy, \quad y = Tx \tag{1}$$

genügen. Wir nehmen nun die Gesamtheit der Lösungen (x, y) von (1) und betrachten die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ der Elemente x und y einer jeden dieser Lösungen. Die Mengen X und Y der Elemente x bzw. y werden durch die Transformationen S und T umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet. Sind also, wie wir voraussetzen wollen, diese Transformationen monoton, dann gilt

$$X \sim Y. \tag{2}$$

Dies gilt auch, wenn eine der beiden Mengen leer sein sollte. Ist nämlich die eine leer, dann ist auch die andere leer. — Nach (1) genügen die $x \in X$ und $y \in Y$ bzw. den Gleichungen

$$x = STx, \quad y = TSy. \tag{3}$$

Wenn umgekehrt x der ersten Gleichung genügt, dann genügen x und $y = Tx$ den Gleichungen (1), so daß sich $x \in X$ ergibt. Für y gilt entsprechendes. Demnach sind die Gleichungen (3) die Gleichungen der Mengen X und Y. Anders gesagt, bestehen X und Y aus den Deckelementen der Transformationen ST bzw. TS. Damit ist bereits bewiesen:

1. Satz. Sind S und T zwei monotone Transformationen eines Verbandes V, dann sind die Mengen $[ST]$ und $[TS]$ der Deckelemente der Transformationen ST bzw. TS einander isomorph:

$$[ST] \sim [TS]. \tag{4}$$

Einander isomorph sind diese Mengen insbesondere durch die zur Gesamtheit der Lösungen (x, y) des Gleichungspaares

$$x = Sy, \quad y = Tx \tag{5}$$

gehörenden Abbildungen $x \rightleftarrows y$.

Die Isomorphie (5) soll die von den (monotonen) Transformationen S und T erzeugte Austauschisomorphie heißen. — Im Falle $S = T$ ist $[ST] = [T^2] = [TS]$. Die Menge $[T^2]$ besteht genau aus denjenigen Elementen des Verbandes, die von T mit einem anderen oder auch mit sich selbst vertauscht werden. Da $[T^2]$ also von T involutorisch in sich selbst transformiert wird, so folgt innerhalb $[T^2]$ nicht nur aus $z_1 =(= z_2$ immer $Tz_1 =(= Tz_2$, sondern umgekehrt auch aus $Tz_1 =(= Tz_2$ immer $z_1 =(= z_2$. Daher ist die von T bewirkte Transformation der Menge $[T^2]$ folgerichtig als ein (involutorischer) Automorphismus von $[T^2]$ zu bezeichnen. Ein solcher führt jedes innerhalb $[T^2]$ existierende k. g. V. zweier Elemente von $[T^2]$ in das k. g. V. der entsprechenden Elemente über und dual.

2.2. Beispiele. 2.2.1. Setzt man $Sz = a \cap z$ und $Tz = b \cup z$, so ergibt sich der „kleine Isomorphiesatz". — 2.2.2. Setzt man $Sz = (a \cap z) \cup (b \cap z)$ und $Tz = (a \cup z) \cap (b \cup z)$, dann ergibt sich eine umfassendere Isomorphie, die sich ebenfalls als eine Teilbundisomorphie erweist. Sie soll in einer besonderen Arbeit unter dem Titel „Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden" ausführlich besprochen werden. — 2.2.3. Man kann allgemeiner setzen

$$Sz = (a_1 \cap z) \cup (a_2 \cap z) \cup \ldots \cup (a_n \cap z)$$

und

$$Tz = (b' \cup z) \cap (b'' \cup z) \cap \ldots \cap (b^n \cup z).$$

Um die unmittelbare Verallgemeinerung des Beispieles 2.2.2. von 2 auf n zu gewinnen, hat man die a_i und b_i noch gewissen Bedingungen zu unterwerfen. Eine ausführliche Besprechung dieses Sonderfalles soll unter dem Titel „Überperspektivitäten in Verbänden" erscheinen. — 2.2.4. Weitere Beispiele, insbesondere auch zum Falle $S = T$, bietet die Geometrie in Fülle. — Da die Beispiele 2.2.1. bis 2.2.3. gewisse übereinstimmende Züge zeigen, die eine allgemeine Besprechung erforderlich machen, wenn man Wiederholungen vermeiden will, so führen wir zunächst die allgemeine Theorie fort.

3. Erster Sonderfall. Fall der Halbgruppe.

3.1. Wenn $S^2 = S$ und $T^2 = T$ sowie $(ST)^2 = ST$ und $(TS)^2 = TS$ ist, dann ist auch $(STS)^2 = STS$ und $(TST)^2 = TST$. Die sechs Transformationen

$$S \text{ und } T$$
$$ST \text{ und } TS$$
$$STS \text{ und } TST$$

bilden dann eine Halbgruppe, die also aus lauter Idempotenten besteht.

3.2. In diesem uns aus dem Beispiel 2.2.1. schon bekannten „Fall der Halbgruppe" treten Vereinfachungen auf, die darauf beruhen, daß die Mengen $[S]$, $[T]$, $[ST]$ usw. der Deckelemente der Transformationen S, T, ST usw. zugleich die von diesen Transformationen entworfenen Bilder des Verbandes V darstellen. Es ergibt sich wie in 6.2. der Arbeit [1])

$$(6) \qquad [ST] =(= [S] \quad \text{und} \quad [TS] =(= [T]$$

sowie

$$(7) \qquad [STS] = [ST] \quad \text{und} \quad [TST] = [TS].$$

Die „zweiten Bilder" des Verbandes werden von den „ersten" umfaßt, die „dritten" fallen mit den „zweiten" zusammen. Von den sechs Transformationen werden also nur vier Verbandbilder entworfen.

3.3. Die „zweiten Bilder" sind eben Bilder voneinander und die „überschüssigen" Transformationen STS und TST liefern uns Parameter-

darstellungen dieser Abbildungen. Und zwar erhalten wir wegen der doppelten Schreibweise der beiden Mengen für die Abbildung T von $[ST] = [STS]$ auf $[TST] = [TS]$ zwei Parameterdarstellungen

$$(8) \qquad STz \to TSTz \quad \text{und} \quad STSz \to TSz \quad \text{mit} \quad z \in V.$$

Und dieselben Parameterdarstellungen, nur mit umgekehrten Pfeilen, erhalten wir auch für die Abbildung S der zweiten Menge auf die erste. Hieraus ergibt sich (für diesen Sonderfall) ein zweiter Beweis des Isomorphiesatzes, dem wir für den „Fall der Halbgruppe" jetzt folgende spezielle Fassung geben können:

2. Satz. Für zwei monotone Transformationen S und T eines Verbandes V, die eine Halbgruppe von lauter Idempotenten erzeugen, gilt: Indem die Transformationen S und T den Verband in die Mengen $[S]$ bzw. $[T]$ ihrer Deckelemente transformieren, entwerfen sie in diesen insbesondere je ein Bild der anderen. Das von S in $[S]$ entworfene Bild von $[T]$ ist die Menge $[ST]$ der Deckelemente von ST, das von T in $[T]$ entworfene Bild von $[S]$ die Menge $[TS]$ der Deckelemente von TS. Diese zweiten Bilder nun sind Bilder voneinander: Es wird nämlich $[ST]$ von T in $[TS]$ transformiert und umgekehrt $[TS]$ von S in $[ST]$. Und da hierbei die eine Transformation die andere umkehrt, so ergibt sich $[ST] \sim [TS]$. Die Isomorphie gestattet die Parameterdarstellungen

$$(9) \qquad STz \rightleftarrows TSTz \quad \text{und} \quad STSz \rightleftarrows TSz \quad \text{mit} \quad z \in V.$$

4. Zweiter Sonderfall. Fall der Umreichfunktion.

4.1. Der Quotient Tz/Sz zweier Transformationen Tz und Sz von V ist eine Funktion, deren Definitionsbereich von den $Sz =(= Tz$ genügenden $z \in V$ gebildet wird. Es seien Sz und Tz insbesondere monotone Transformationen von V:

1. Erklärung. Der Quotient $U(z) = Tz/Sz$ zweier monotoner Transformationen Tz und Sz eines Verbandes V heißt eine Umreichfunktion (und sein Wert für z das Umreich von z), wenn er folgenden Bedingungen genügt:

I. Jedes $z \in V$ besitzt ein Umreich $U(z)$.

II. $z \in U(z)$.

III. Aus $x \in U(z)$ folgt $U(x) =(= U(z)$.

1. Hilfssatz. Der Quotient $U(z) = Tz/Sz$ zweier monotoner Transformationen Tz und Sz eines Verbandes V ist genau dann eine Umreichfunktion, wenn

$$(10) \qquad \text{für alle } z \in V \qquad Sz =(= z =(= Tz$$

besteht und die Transformationen S und T idempotent sind.

Genau unter den Bedingungen (10) besitzt er nämlich die Eigenschaften I und II. Dies vorausgesetzt, wird er die Eigenschaft III genau

dann besitzen, wenn aus

(11) $$Sz \mathrel{=\!(} x \mathrel{=\!(} Tz$$

immer

(12) $$Sz \mathrel{=\!(} Sx \mathrel{=\!(} x \mathrel{=\!(} Tx \mathrel{=\!(} Tz$$

folgt. Hierzu ist erforderlich, daß (12) insbesondere für $x = Sz$ und für $x = Tz$ gelte, daß nämlich $Sz \mathrel{=\!(} S^2z \mathrel{=\!(} Sz$ und $Tz \mathrel{=\!(} T^2z \mathrel{=\!(} Tz$, kurz

(13) $$S^2 = S \quad \text{und} \quad T^2 = T$$

sei. Und dies ist, (10) vorausgesetzt, auch hinreichend. Denn aus (11) folgt mit (10) $S^2z \mathrel{=\!(} Sx \mathrel{=\!(} x \mathrel{=\!(} Tx \mathrel{=\!(} T^2z$ und hieraus mit (13) offenbar (12). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

4.2. Da bei einer Umreichfunktion $U(z)$ von III auch die Umkehrung gilt, so ist bei ihr $x \in U(c)$ gleichbedeutend mit $U(x) \mathrel{=\!(} U(c)$, d. h. mit $Sx \mathrel{=\!)} Sc$ und $Tx \mathrel{=\!(} Tc$. Diejenigen $x \in U(c)$, die darüber hinaus $U(x) = U(c)$, d. h.

(14) $$Sx = Sc \quad \text{und} \quad Tx = Tc$$

genügen, sollen die primitiven Elemente von $U(c)$ heißen.

$U(c)$ heißt ein kleinstes Umreich oder ein Kleinstwert der Umreichfunktion $U(z)$, wenn aus $U(x) \mathrel{=\!(} U(c)$ allemal $U(x) = U(c)$ folgt, wenn nämlich $U(c)$ aus lauter primitiven Elementen besteht. Wenn x einem kleinsten Umreich angehört, dann ist $U(x)$ das kleinste Umreich, dem x angehört. Daher besagen die Aussagen „x besitzt ein kleinstes Umreich" und „x gehört einem kleinsten Umreich an" ein und dasselbe. Ein kleinstes Umreich ist bei gegebener Umreichfunktion durch irgend eines seiner Elemente bestimmt. Irgend zwei kleinste Umreiche sind entweder identisch oder elementefremd.

$U(c)$ ist genau dann ein kleinstes Umreich, wenn alle $x \in U(c)$ den Bedingungen (14) genügen. Da S und T nach Voraussetzung monoton sind, so trifft dies bereits dann allgemein zu, wenn nur die Örter Sc und Tc von $U(c)$ ihnen genügen. Nun befriedigt wegen der Idempotenz von S und T der Wert $x = Sc$ die erste der Gleichungen (14), der Wert $x = Tc$ die zweite. Zu erfüllen bleiben also die Bedingungen $STc = Sc$ und $TSc = Tc$. Da $STc \mathrel{=\!)} Sc$ und $TSc \mathrel{=\!(} Tc$ nach (10) ohnehin bestehen, so genügt es, $STc \mathrel{=\!(} Sc$ und $TSc \mathrel{=\!)} Tc$ zu fordern, und dafür kann man einfacher schreiben $STc \mathrel{=\!(} c \mathrel{=\!(} TSc$. Es gilt also:

2. Hilfssatz. Eine Umreichfunktion $U(z) = Tz/Sz$ nimmt genau an denjenigen Stellen z einen Kleinstwert an, die den Gleichungen

(15) $$STz = Sz \quad \text{und} \quad TSz = Tz$$

oder also den Subsumptionen

(16) $$STz \mathrel{=\!(} z \mathrel{=\!(} TSz$$

genügen.

4.3. Wir wollen die Frage ein wenig anders fassen: Nach dem letzten Hilfsatze stellt ein gegebenes Zwischenreich y/x genau dann einen Kleinstwert der Umreichfunktion $U(z)$ dar, wenn es ein (15) genügendes Element z gibt, für das $x = Sz$ und $y = Tz$ ist. Hierzu ist offenbar

$$x = Sy \quad \text{und} \quad y = Tx \tag{17}$$

erforderlich. Aber auch hinreichend! Denn aus (17) folgt über die Idempotenz von S und T

$$x = Sx \quad \text{und} \quad y = Ty, \tag{18}$$

andererseits mit (10) aber $x \mathrel{=\!\!(} y$, also, weil S und T monoton sind, für die $z \in y/x$

$$x = Sz \quad \text{und} \quad y = Tz \tag{19}$$

und diese z genügen, wie aus (17) und (19) folgt, den Bedingungen (15). Damit ist bewiesen:

3. Hilfssatz. Ein gegebenes Zwischenreich y/x stellt genau dann einen Kleinstwert der Umreichfunktion $U(z) = Tz/Sz$ dar, wenn seine Örter x und y den Bedingungen (17) genügen.

Diese Bedingungen sind uns bereits bekannt: Es sind die Gleichungen der Austauschisomorphie des 1. Satzes. Bedienen wir uns also der Ausdrucksweise, das Zwischenreich y/x verbinde die Elemente x und y, dann können wir unser Ergebnis so aussprechen: Die Kleinstwerte der Umreichfunktion Tz/Sz verbinden die Deckelemente x der Transformation ST mit den Deckelementen y der Transformation TS und bringen so die Austauschisomorphie $x = Sy$, $y = Tx$ zustande.

4.4. Um die Art dieses Verbindens noch genauer zu untersuchen, ordnen wir die Kleinstwerte y/x der Umreichfunktion der Gesamtheit der Zwischenreiche v/u ein, die ein $u \in [ST]$ mit einem $v \in [TS]$ verbinden. Unter diesen v/u wird es kleinste geben; es sind offenbar diejenigen, die mit $[ST]$ nur u und mit $[TS]$ nur v gemein haben. Letzteres trifft bei den Kleinstwerten der Umreichfunktion zweifellos zu. Enthält nämlich der Kleinstwert y/x das Element $u \in [ST]$, dann fällt er mit dem Umreich von u zusammen. Und da u dessen progressiver Ort ist[2]), so ist $u = x$. Und dual. Es sind also die Kleinstwerte y/x der Umreichfunktion kleinste v/u.

Dem Beweise der Umkehrung schicken wir voraus, daß die Subsumptionen (6), die wir „im Falle der Halbgruppe" vorfanden, auch „im Falle der Umreichfunktion" bestehen. Sie ergeben sich aus der Idempotenz von S und T: Aus der Gleichung $x = STx$ von $[ST]$ folgt nämlich $Sx = S^2Tx = STx = x$, d. h. die Gleichung von $[S]$, aus der von $[TS]$ die von $[T]$.

Nun ergibt sich die Umkehrung so: Bei einem beliebigen v/u folgt aus $u \mathrel{=\!\!(} v$ mit Hilfe von (10) $u \mathrel{=\!\!(} Tu \mathrel{=\!\!(} Tv$ und $Su \mathrel{=\!\!(} Sv \mathrel{=\!\!(} v$ und

[2]) Nach (15) ist $Su = STu = u$.

hieraus wegen $u \in [ST]$ und $v \in [TS]$ nach (6) $u =(= Tu =(= v$ und $u =(= Sv =(= v$, d. h. $Tu \in v/u$ und $Sv \in v/u$. Nun ist aber $Tu \in [TS]$ und $Sv \in [ST]$. Hat also v/u mit diesen Mengen nur die Elemente v bzw. u gemein, dann ist $Tu = v$, $Sv = u$ und v/u nach dem 3. Hilfssatz ein Kleinstwert der Umreichfunktion.

Werden also die Kleinstwerte y/x der Umreichfunktion Tz/Sz von den kleinsten unter den Zwischenreichen v/u mit $u \in [ST]$ und $v \in [TS]$ gebildet, dann ist ihre Menge durch die Mengen $[ST]$ und $[TS]$ bestimmt. Gleiches gilt auch von der Menge der $z \in y/x$:

4. Hilfssatz. Die Menge der Elemente kleinsten Umreiches Tz/Sz ist durch die Mengen $[ST]$ und $[TS]$ der Deckelemente der Transformationen ST bzw. TS bestimmt. Sie besteht nämlich aus denjenigen Elementen z, die einem kleinsten ein $x \in [ST]$ mit einem $y \in [TS]$ verbindenden Zwischenreich y/x angehören, d. h. einem solchen, das mit $[ST]$ nur x und mit $[TS]$ nur y gemein hat. y/x ist das Umreich von z.

Nach dem 2. und 4. Hilfssatz scheint für die Menge der Elemente kleinsten Umreiches Tz/Sz das Symbol $[TS] : [ST]$ passend zu sein.

4. 5. Mit den Ergebnissen von 4. 3. und 4. 4. zur Austauschisomorphie des 1. Satzes zurückkehrend, können wir den Satz hinschreiben:

3. Satz. Wenn Tz/Sz eine Umreichfunktion ist, dann ist die Austauschisomorphie zwischen den Mengen $[ST]$ und $[TS]$ der Deckelemente der Transformationen ST bzw. TS durch diese Mengen bestimmt. Sie ist nämlich die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ der Örter x und y der kleinsten unter den Zwischenreichen y/x, die ein $x \in [ST]$ mit einem $y \in [TS]$ verbinden (Erster Eindeutigkeitssatz).

Zusatz. Auch kann die Austauschisomorphie $[ST] \sim [TS]$ in diesem Falle als die Zuordnung

$$(20) \qquad Sz \rightleftarrows Tz \qquad z \in ([TS] : [ST])$$

der Örter der Kleinstwerte der Umreichfunktion Tz/Sz beschrieben werden.

4. 6. Auf eine noch etwas einfachere Beschreibung der Austauschisomorphie für den „Fall der Umreichfunktion" kommen wir, wenn wir die Gesamtheit der Zwischenreiche v/u ins Auge fassen, die ein $u \in [S]$ mit einem $v \in [T]$ verbinden. Zu ihnen gehören die Werte der Umreichfunktion Tz/Sz; denn wegen der Idempotenz von S und T ist $Sz \in [S]$ und $Tz \in [T]$. Daß nicht jedes v/u ein Tz/Sz ist, kann man an Beispielen leicht zeigen. Wohl aber gilt: Aus $z \in v/u$ folgt

$$u = Su =(= Sz =(= Tz =(= Tv = v,$$

kurz $Tz/Sz =(= v/u$. Ein v/u umfaßt also das Umreich jedes seiner Elemente.

Da dieses Umreich aber selbst ein v/u ist und ein kleinstes v/u folglich mit dem Umreiche eines jeden seiner Elemente zusammenfällt, so ist ein kleinstes v/u ein kleinstes Umreich. Und da ein kleinstes Um-

reich Tz/Sz mit jedem von ihm umfaßten v/u zusammenfällt, weil es mit den von diesem umfaßten Umreichen zusammenfällt, so ist umgekehrt auch jedes kleinste Umreich ein kleinstes v/u. Daher können wir dem ersten Eindeutigkeitssatz den folgenden zweiten zur Seite stellen:

4. Satz. Ist Tz/Sz eine Umreichfunktion, dann ist die Austauschisomorphie $[ST] \sim [TS]$ (wie durch die Mengen $[ST]$ und $[TS]$ so auch) durch die Mengen $[S]$ und $[T]$ der Deckelemente der Transformationen S bzw. T bestimmt. Sie ist nämlich die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ der Örter x und y der kleinsten unter den Zwischenreichen y/x, die ein $x \in [S]$ mit einem $y \in [T]$ verbinden (Zweiter Eindeutigkeitssatz).

Beispielsweise ist die Perspektivität $a/(a \wedge b) \sim (a \vee b)/b$ die Zuordnung der Örter der kleinsten unter den Zwischenreichen y/x, die einen Teiler von a mit einem Vielfachen von b verbinden.

4.7. Wir gehen schließlich noch auf einen gewissen Kongruenzbegriff ein, der in die Theorie hineinspielt:

2. Erklärung. Wir sagen, die Elemente x und y seien für die Transformationen S und T kongruent und schreiben $x \equiv y\,(S, T)$, wenn $Sx = Sy$ und $Tx = Ty$ ist.

Sind S und T monotone Transformationen, dann folgt aus $p \,=\!(\, q \,=\!(\, r$ und $p \equiv r$ immer $p \equiv q \equiv r$. Ist, wie wir voraussetzen wollen, $U(z) = Tz/Sz$ eine Umreichfunktion, dann ist $x \equiv y(S, T)$ gleichbedeutend mit $U(x) = U(y)$.

4.7.1. Daher ist die Klasse $z \equiv c$ der c kongruenten Elemente die Gesamtheit der $U(z) = U(c)$ genügenden Elemente z. Das Umreich $U(c)$ heißt die Klassenkonstante. Offenbar gilt

$$\text{Klasse} \,=\!(\, \text{Klassenkonstante}. \tag{21}$$

Damit (21) als Gleichung bestehe, dazu ist erforderlich und wegen der Monotonie der Transformationen nach 4.7. auch hinreichend, daß die Klasse die Elemente Sc und Tc enthält. Eine Klasse, die mit ihrer Konstanten zusammenfällt, soll eine Sonderklasse heißen.

Ein Umreich $U(c)$ enthält zu jedem seiner Elemente auch alle kongruenten, setzt sich also aus Klassen kongruenter Elemente zusammen. Die c enthaltende Klasse besteht aus seinen primitiven Elementen. Genau die kleinsten Umreiche sind Klassen kongruenter Elemente.

Andererseits sind unter den Klassen kongruenter Elemente genau die Sonderklassen Umreiche. Ist nämlich die Klasse K ein Umreich, dann folgt aus $K = Tp/Sp$ offenbar $p \in K$. Also ist Tp/Sp die Klassenkonstante und K eine Sonderklasse. Umgekehrt ist eine Sonderklasse ein Umreich.

Sind aber unter den Umreichen genau die kleinsten zugleich Klassen kongruenter Elemente, unter den Klassen kongruenter Elemente genau die Sonderklassen zugleich Umreiche, dann deckt sich der Begriff des kleinsten Umreiches mit dem der Sonderklasse kongruenter Elemente.

4.7.2. Die Klasse K der c kongruenten Elemente, so fanden wir, ist genau dann eine Sonderklasse, wenn $Sc \in K$ und $Tc \in K$ ist. Das läßt

sich noch einfacher sagen: Enthält die Klasse $z \equiv c$ ein Bildelement Sx der Transformation S, dann ist $S^2x = Sc$ und somit $Sx = Sc$, also Sc das Bildelement von S, das sie enthält. Enthält sie ein Bildelement der Transformation T, dann ist Tc dieses Bildelement. Demnach enthält die Klasse höchstens ein Bildelement von S und höchstens eines von T. Enthält sie von jeder der beiden Transformationen ein Bildelement, genau dann ist sie eine Sonderklasse. — Diese ist aber nach 4. 7. 1. nichts anderes als ein kleinstes Umreich. Also kann der 4. Satz nach der Folgerung zum 3. auch so gefaßt werden:

5. Satz. Ist Tz/Sz eine Umreichfunktion, dann gilt: Zu einem $x \in [S]$ gibt es höchstens ein für S und T kongruentes $y \in [T]$ und umgekehrt. Die Austauschisomorphie $[ST] \sim [TS]$ ist die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ derjenigen $x \in [S]$ und $y \in [T]$, die tatsächlich einander für S und T kongruent sind. Sie genügt $x =(= y$ und die Zwischenreiche y/x sind Gesamtheiten für S und T kongruenter Elemente.

Wir können noch hinzufügen, daß jedes andere ein $x \in [S]$ mit einem $y \in [T]$ verbindende Zwischenreich y/x sich aus einer Mehrheit von Klassen kongruenter Elemente zusammensetzt. Denn es umfaßt das Umreich jedes seiner Elemente z und dieses enthält auch die z kongruenten Elemente, x und y aber sind nach Voraussetzung nicht kongruent.

(Eingegangen am 13. Januar 1947.)

Ein Beitrag zur Theorie der linearen Holoide.

Von

F. Klein-Barmen, z. Zt. in Weimar.

Einleitung.

Unter den formalen Disziplinen der Mathematik nehmen die *Gruppentheorie* und die *Theorie der Verbände* eine führende Stellung ein. Jede der beiden Disziplinen verkörpert ein bestimmtes Ordnungsprinzip. Beide wollen, wenn auch auf eigenen Wegen, die gemeinsame Struktur der hinsichtlich ihres Inhaltes verschiedenen Einzelgebiete der Mathematik herausschälen und damit die Einstimmigkeit der gesamten Mathesis begründen und in Evidenz setzen. Deshalb sind die Gruppentheorie und die Theorie der Verbände nicht nur für den Mathematiker, sondern auch für den Philosophen von hohem Reiz. Für die Theorie der Verbände kommt hinzu, daß diese Disziplin durch mannigfache Querverbindungen eng mit der Logik und Logistik verflochten ist[1]).

Der Begriff des *Holoids* gehört dem verbandstheoretischen Ideenkreis an. In zwei vorhergehenden Arbeiten[2]) habe ich diesen Begriff erstmalig aufgestellt und entwickelt. Seine Bedeutung beruht darauf, daß durch ihn eine Brücke zwischen den Begriffen „Halbverband" und „kommutative Semigruppe" geschlagen wird. In der vorliegenden Untersuchung gehe ich erneut auf das *lineare* Holoid ein und baue das sich um diesen Zentralbegriff gruppierende System weiter aus. Die als *Fundamentalholoide* bezeichneten Sonderformen weisen besonders übersichtliche Strukturverhältnisse auf; in einfacher Weise lassen sie sich durch Folgen von gewöhnlichen Zahlen — wir nennen diese Folgen *Zahlbezirke* — realisieren. Im Zusammenhang damit wird ein früher aufgestellter Satz[3]) ergänzt.

---

[1]) Auf das Verhältnis der Theorie der Verbände zur Logik der Aussagen bin ich in [A. V. 5], S. 373 eingegangen; vgl. auch Hermes-Köthe [1], S. 3 und S. 19 ff., ferner Müller [1], S. 16. Bei dieser Gelegenheit möchte ich es nicht unterlassen, auf die beiden Veröffentlichungen [1] und [2] von H. Scholz hinzuweisen, die den sich mit Grundlagenfragen beschäftigenden Mathematiker in hohem Maß angehen. In diesen Schriften geht der Verfasser gegen zahlreiche Mißverständnisse und Vorurteile an, die sich der unbedingt notwendigen Verständigung zwischen Mathematik und Logistik und der Zusammenarbeit beider bedauerlicherweise noch immer entgegenstellen; vgl. [H/S. 2], S. 715 und 716.

[2]) Vgl. [H/S. 1] und [H/S. 2].

[3]) Vgl. [H/S. 2], S. 733.

Besondere Vorkenntnisse werden beim Leser nicht vorausgesetzt; doch empfiehlt es sich, des besseren Verständnisses wegen die mit [H/S. 1] und [H/S. 2] bezeichneten Arbeiten einzusehen.

§ 1.

Das allgemeine und das lineare Holoid.

1. Es sei M eine nichtleere Menge von wohlunterschiedenen Elementen. Bezeichnen a und b Elemente von M, so gelte also entweder $a = b$ oder $a \neq b$. Die Elemente von M seien ferner einer durch o symbolisierten *Verknüpfung* fähig. Diese Verknüpfung soll den folgenden *Axiomen* genügen:

A I. Sind a, b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es in M ein Element c derart, daß

$$a\,o\,b = c$$

gilt[4]).

A II. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M gilt

$$(a\,o\,b)\,o\,c = a\,o\,(b\,o\,c).$$

A III. Für zwei beliebige Elemente a, b aus M gilt

$$a\,o\,b = b\,o\,a.$$

A IV. Es gibt in M ein Element e derart, daß für jedes Element a aus M

$$a\,o\,e = a$$

gilt.

A V. Sind a, b und x, y Elemente aus M derart, daß

$$a = b\,o\,x, \quad b = a\,o\,y$$

gilt, so ist

$$a = b.$$

Erklärung 1. Eine Menge M mit einer den Axiomen A I bis A V genügenden Elementverknüpfung o heiße ein *Holoid* in bezug auf o, kurz ein $\mathfrak{Hol}(o)$. Ein Holoid werde als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet, je nachdem es aus endlich oder unendlich vielen Elementen besteht. Unter der *Ordnung* eines endlichen Holoids werde die Anzahl der verschiedenen Elemente verstanden, aus denen das Holoid besteht.

Weiterhin sei M ein $\mathfrak{Hol}(o)$.

Erklärung 2. Ein Element e aus M heiße ein *unterstes* Element oder eine *untere Spitze* von M, wenn für jedes Element a aus M

$$a\,o\,e = a$$

gilt. Ein Element f aus M heiße ein *oberstes* Element oder eine *obere Spitze* von M, wenn für jedes Element a aus M

$$a\,o\,f = f$$

gilt.

Satz 1. *Jedes Holoid hat genau eine untere Spitze.*

[4]) Das Element c ist eindeutig bestimmt. Aus A I folgt ferner: Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M gilt entweder $a\,o\,b = c$ oder $a\,o\,b \neq c$.

Beweis. Daß *höchstens* eine untere Spitze vorhanden ist, ergibt sich so: Sind e und e' untere Spitzen von M, so findet nach Erklärung 2

$$e' o e = e', \quad e o e' = e$$

statt, woraus nach A III die Identität von e und e' folgt.

Daß *mindestens* eine untere Spitze vorhanden ist, gewährleistet A IV.

Satz 2. *Jedes Holoid hat höchstens eine obere Spitze; insbesondere hat jedes endliche Holoid genau eine obere Spitze.*

Beweis. Die Richtigkeit des ersten Teils der Behauptung ergibt sich wie im vorhergehenden Satz.

Zum Nachweis der *Existenz* einer oberen Spitze für den Fall, daß M aus endlich vielen, etwa aus n verschiedenen Elementen

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 1)$$

besteht, setzen wir

$$(1) \qquad a_1 o \ldots o a_n = f$$

und zeigen, daß

$$(2) \qquad a_\nu o f = f \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt. Das geschieht so: Findet (2) nicht durchweg statt, so gibt es mindestens ein Element a_ν derart, daß (2) falsch ist. Unbeschadet der Allgemeinheit kann

$$(3) \qquad a_n o f = g \qquad (f \neq g)$$

angenommen werden. Folgendermaßen läßt sich ein Widerspruch gegen diese Annahme herstellen. Da g ein Element von M ist, kann man statt (1), indem man die von g verschiedenen Elemente zu einem einzigen Element h zusammenfaßt, auch

$$(4) \qquad g o h = f$$

schreiben. Aus (3) und (4) folgt aber nach A V die Identität von f und g.

Was die *unendlichen* Holoide anbetrifft, so gibt es sowohl solche mit einer oberen Spitze als auch solche ohne obere Spitze, wie die Beispiele in den nächsten Paragraphen zeigen.

Erklärung 3. Ein Element a aus M, für das

$$a o a = a$$

gilt, heiße *idempotent*. Die Menge der idempotenten Elemente von M werde das *Rückgrat* von M genannt.

Da das unterste Element von M — ebenso wie ein etwa vorhandenes oberstes Element — idempotent ist, ist die als Rückgrat bezeichnete Teilmenge von M niemals leer.

2. Auf das Holoid M wirke das nachstehende *Axiom* ein:

A VI. Für je zwei verschiedene Elemente a, b aus M gibt es entweder ein Element x aus M derart, daß gilt

$$a = b o x,$$

oder ein Element y aus M derart, daß gilt

$$b = a o y.$$

Wie nebenbei bemerkt werde, lassen sich die Gleichungen des Axioms A VI in dem Fall, daß die Elemente a, b nicht verschieden sind, auf triviale Weise erfüllen; wegen A IV kann man in diesem Fall x und y ersichtlich durch e ersetzen.

Zwischen den Axiomen A V und A VI besteht eine enge Verwandtschaft, insofern jedes dieser beiden Axiome als eine natürliche Ergänzung des anderen angesehen werden kann. Während nämlich A V verlangt, daß zwischen zwei verschiedenen Elementen a, b *höchstens* eine der Gleichungen

$$a = box, \quad b = aoy \tag{5}$$

besteht, fordert A VI, daß zwischen a und b *mindestens* eine der Gleichungen (5) besteht.

Erklärung 4. Ein dem Axiom A VI genügendes Holoid heiße *linear*.

Leicht sieht man die Richtigkeit des folgenden Satzes ein:

Satz 3. *Jedes Holoid von der ersten, zweiten oder dritten Ordnung ist linear.*

Erklärung 5. Ein lineares Holoid heiße ein *Fundamentalholoid erster Art*, wenn es von mindestens zweiter Ordnung ist, neben der unteren Spitze eine obere Spitze besitzt und außer den beiden Spitzen keine weiteren idempotenten Elemente enthält. Ein lineares Holoid heiße ein *Fundamentalholoid zweiter Art*, wenn es keine obere Spitze besitzt und außer der unteren Spitze keine weiteren idempotenten Elemente enthält.

Ein Fundamentalholoid erster Art kann sowohl endlich als auch unendlich sein; ein Fundamentalholoid zweiter Art ist notwendigerweise unendlich.

Ohne daß wir in der vorliegenden Arbeit näher darauf einzugehen beabsichtigen, merken wir an, daß sich jedes lineare Holoid aus Fundamentalholoiden zusammensetzen läßt.

Daß der in diesem Paragraphen aufgestellte formale Apparat widerspruchslos funktioniert, zeigen wir an Modellen, deren Beschreibung wir uns im folgenden zuwenden.

§ 2.

Zahlbezirke.

1. Es sei M eine aus positiven oder negativen Zahlen bestehende, endliche oder unendliche Menge. Es seien die beiden folgenden *Bedingungen* in Kraft:

B I. Die Menge M enthält eine kleinste und eine größte Zahl. Die kleinste Zahl werde mit e, die größte mit f bezeichnet.

B II. Für je zwei Zahlen a, b aus M ist die durch

$$c = \min(a + b - e, f) \tag{6}$$

eindeutig bestimmte Zahl c ebenfalls Element von M.

Erklärung 6. Eine den Bedingungen B I und B II genügende Zahlenmenge M heiße ein *geschlossener Zahlbezirk*, kurz ein $\mathfrak{G}$-Bezirk. Ein $\mathfrak{G}$-Bezirk heiße *endlich* oder *unendlich*, je nachdem derselbe aus endlich oder unendlich vielen Zahlen besteht.

Wegen B I ist ein $\mathfrak{G}$-Bezirk niemals leer. Im übrigen stellt B I natürlich nur für *unendliche* Mengen eine Einschränkung dar.

Wir bringen einige *Beispiele* zur Verdeutlichung der Begriffsbildung:

α) Jede aus einer einzigen Zahl und jede aus genau zwei Zahlen bestehende Menge ist ein $\mathfrak{G}$-Bezirk.

β) $\mathfrak{G}$-Bezirke, die aus drei Zahlen bestehen, sind z. B.

$$M = \{2, 4, 6\}, \quad M = \{2, 4, 5\}.$$

Umgekehrt ist aber nicht jede aus drei oder mehr Zahlen bestehende Menge ein $\mathfrak{G}$-Bezirk, so nicht die Menge

$$M = \{2, 4, 7\},$$

weil die sich gemäß (6) für $a = b = 4$ ergebende Zahl 6 nicht Element der Menge ist.

γ) Es gibt endliche $\mathfrak{G}$-Bezirke mit einer beliebigen Anzahl von Elementen. Folgendermaßen erhält man $\mathfrak{G}$-Bezirke, die aus n Elementen bestehen. Es sei d eine positive Zahl. Vermittelst derselben werde die arithmetische Reihe

$$\ldots, -2d, -d, 0, d, 2d, \ldots \tag{7}$$

gebildet. Sind dann

$$h_1, \ldots, h_n \qquad (n \geqq 1) \tag{8}$$

n aufeinanderfolgende Zahlen aus (7), so ist, wie man sich leicht überzeugt, die Menge der Zahlen (8) ein $\mathfrak{G}$-Bezirk mit

$$e = h_1, \quad f = h_n.$$

Offenbar fallen die in α) angegebenen Bezirke und der erste in β) angegebene Bezirk darunter.

γ') Vermittelst (7) lassen sich noch auf eine weitere Art $\mathfrak{G}$-Bezirke gewinnen, die aus n Elementen bestehen. Wir unterdrücken in (8) die erste Zahl h_1 und ersetzen sie durch irgend eine Zahl h aus (7), für die $h < h_1$ sei. Dann ist die Menge der Zahlen

$$h, h_2, \ldots, h_n$$

ebenfalls ein $\mathfrak{G}$-Bezirk. Die zweite der unter β) betrachteten Mengen ist ein solcher Bezirk.

δ) Ein Beispiel für einen *unendlichen* $\mathfrak{G}$-Bezirk: Sind h', h'' zwei rationale Zahlen[5]), für die $h' < h''$ gilt, so ist die Menge der rationalen Zahlen x, für die

$$h' \leqq x \leqq h''$$

gilt, ein derartiger Bezirk.

[5]) Wer den Begriff der *reellen* Zahl als standfest ansieht, kann hier und auch weiterhin statt rationaler Zahlen allgemeiner reelle Zahlen nehmen.

δ') Zwei weitere Beispiele für *unendliche* $\mathfrak{G}$-Bezirke: Wie in δ) seien h', h'' zwei rationale Zahlen mit $h' < h''$. Ist dann h eine weitere rationale Zahl mit $h < h'$, so ist sowohl die Menge, die aus h und allen rationalen Zahlen x besteht, für die

$$h' \leqq x \leqq h''$$

gilt, als auch die Menge, die aus h und allen rationalen Zahlen x besteht, für die

$$h' < x \leqq h''$$

gilt, ein unendlicher $\mathfrak{G}$-Bezirk.

Satz 4. *Ein $\mathfrak{G}$-Bezirk geht durch lineare Transformation in einen isomorphen $\mathfrak{G}$-Bezirk über.*

Beweis. Es sei M der vorgegebene $\mathfrak{G}$-Bezirk; die Verknüpfung der Elemente von M regle sich nach

$$c = \min(a + b - e,\ f). \tag{6}$$

Auf die Elemente von M werde die Transformation

$$x = \varkappa x' + k \qquad (\varkappa > 0;\ k \gtreqless 0) \tag{9}$$

ausgeübt. Wegen

$$\min(a + b - e, f) = \varkappa \min(a' + b' - e', f') + k$$

ist

$$c' = \min(a' + b' - e', f'), \tag{6'}$$

so daß $M' = \{x'\}$ ein mit $M = \{x\}$ isomorpher $\mathfrak{G}$-Bezirk ist.

Von besonderer Bedeutung sind die speziellen Transformationen

$$x = x' + k \qquad (k \gtreqless 0)$$

und

$$x = \varkappa x' \qquad (\varkappa > 0),$$

aus denen sich die allgemeine Transformation (9) aufbauen läßt.

Im ersten Fall geht M' aus M durch eine Verschiebung um das Intervall $|k|$ hervor. Insbesondere geht (6') für $k = e$ in

$$c' = \min(a' + b', f')$$

über. Durch eine Verschiebung kann man also stets erreichen, daß e' mit 0 zusammenfällt.

Im zweiten Fall wird wegen

$$f - e = \varkappa(f' - e')$$

das Intervall, in dem sich die Elemente des Bezirks befinden, verkleinert oder vergrößert, je nachdem $\varkappa > 1$ oder $\varkappa < 1$ ist, wobei wir von dem trivialen Fall absehen, daß $e = f$ ist. Ferner kann man, wenn M ein *endlicher* $\mathfrak{G}$-Bezirk ist, dessen Elemente *Brüche* sind, durch geeignete Wahl von $\varkappa$ stets einen isomorphen Bezirk herstellen, dessen Elemente *ganze* Zahlen sind.

Bei der Untersuchung endlicher $\mathfrak{G}$-Bezirke kann man sich also auf solche Bezirke beschränken, die erstens 0 zur kleinsten Zahl haben und zweitens nur aus ganzen Zahlen bestehen.

2. Es sei M eine aus positiven oder negativen Zahlen bestehende Menge. Es seien die beiden folgenden *Bedingungen* in Kraft:

C I. Die Menge M enthält eine kleinste Zahl. Diese werde mit e bezeichnet.

C II. Für je zwei Zahlen a, b aus M ist die durch

$$c = a + b - e$$

eindeutig bestimmte Zahl c ebenfalls Element von M.

Erklärung 7. Eine den Bedingungen C I und C II genügende Zahlenmenge M heiße ein *offener Zahlbezirk*, kurz ein $\mathfrak{O}$-Bezirk.

Wegen C I ist ein $\mathfrak{O}$-Bezirk niemals leer. Wegen C II besteht ein $\mathfrak{O}$-Bezirk entweder aus einer einzigen Zahl — von diesem trivialen Fall sehen wir weiterhin ab — oder aus unendlich vielen Zahlen.

Einige *Beispiele* von $\mathfrak{O}$-Bezirken:

ε) Ist h_1 ein Element der unter γ) betrachteten Folge

$$\ldots, -2d, -d, 0, d, 2d, \ldots, \tag{7}$$

so ist die Menge

$$h_1, h_2, \ldots$$

der auf h_1 folgenden Zahlen aus (7) einschl. h_1 ein $\mathfrak{O}$-Bezirk. Ein konkretes Beispiel ist die Folge

$$2, 4, 6, \ldots.$$

ε') Ist h mit $h < h_1$ eine weitere Zahl aus (7), so bilden auch die unendlich vielen Zahlen

$$h, h_2, h_3, \ldots$$

einen $\mathfrak{O}$-Bezirk. Ein konkretes Beispiel ist die Folge

$$0, 4, 6, \ldots.$$

ζ) Ist h' eine rationale Zahl, so ist die Menge der rationalen Zahlen x, für die $h' \leqq x$ gilt, ein $\mathfrak{O}$-Bezirk.

ζ') Wie in ζ) sei h' eine rationale Zahl. Ist dann h eine weitere rationale Zahl mit $h < h'$, so ist sowohl die Menge, die aus h und allen rationalen Zahlen x besteht, für die $h' \leqq x$ gilt, als auch die Menge, die aus h und allen rationalen Zahlen x besteht, für die $h' < x$ gilt, ein $\mathfrak{O}$-Bezirk.

Das Gegenstück zu Satz 4 lautet:

Satz 5. *Ein $\mathfrak{O}$-Bezirk geht durch lineare Transformation in einen isomorphen $\mathfrak{O}$-Bezirk über.*

Der Beweis verläuft wie bei Satz 4.

Schließlich weisen wir darauf hin, daß jeder $\mathfrak{O}$-Bezirk wegen

$$\lim_{f \to \infty} \min(a + b - e, f) = a + b - e$$

als Grenzfall eines $\mathfrak{G}$-Bezirks aufgefaßt werden kann.

3. Das Begrifflich-Abstrakte sucht und findet seine Erfüllung im Anschaulich-Konkreten. Anders ausgedrückt: Ein begrifflich konstruiertes System bedarf eines Modells, das seine Lebensfähigkeit, d. h. in logischer Hinsicht seine Widerspruchslosigkeit garantiert. Dieser These gemäß erbringen wir in den folgenden Sätzen den Nachweis dafür, daß die eben beschriebenen Zahlbezirke den Formalbegriff des Holoids realisieren.

Satz 6. *Ein* $\mathfrak{G}$*-Bezirk ist ein Holoid in bezug auf die durch*

$$a\,o\,b \equiv \min(a+b-e, f) \tag{10}$$

erklärte Verknüpfung o.

Beweis. Nachzuweisen ist, daß die durch (10) definierte Verknüpfung o den Axiomen A I bis A V genügt.

Zu A I und A III) Ohne Weiteres ist klar, daß diese beiden Axiome in Kraft sind.

Zu A II) Einerseits ist

$$\begin{aligned}(a\,o\,b)\,o\,c &\equiv \min\{\min(a+b-e,f)+c-e,f\}\\ &= \min\{\min(a+b+c-2e, f+c-e), f\}\\ &= \min(a+b+c-2e, f+c-e, f)\\ &= \min(a+b+c-2e, f);\end{aligned}$$

andererseits ist

$$\begin{aligned}a\,o\,(b\,o\,c) &\equiv \min\{a+\min(b+c-e,f)-e,f\}\\ &= \min\{\min(a+b+c-2e, f+a-e), f\}\\ &= \min(a+b+c-2e, f+a-e, f)\\ &= \min(a+b+c-2e, f).\end{aligned}$$

Somit ist

$$(a\,o\,b)\,o\,c = a\,o\,(b\,o\,c).$$

Zu A IV) Es ist

$$a\,o\,e \equiv \min(a+e-e, f) = a.$$

Zu A V) Aus

$$a = b\,o\,x, \text{ d. h. } a = \min(b+x-e, f)$$

folgt $a \geqq b$; aus

$$b = a\,o\,y, \text{ d. h. } b = \min(a+y-e, f)$$

folgt $b \geqq a$. Also ist $a = b$.

Satz 7. *Ein* $\mathfrak{O}$*-Bezirk ist ein Holoid in bezug auf die durch*

$$a\,o\,b \equiv a+b-e$$

erklärte Verknüpfung o.

Dieser Satz wird genau so bewiesen wie der vorhergehende; die Durchführung bleibe dem Leser überlassen.

§ 3.

Realisierung des linearen Holoids.

1. Es sei M eine aus positiven oder negativen Zahlen bestehende, endliche oder unendliche Menge. Es seien die beiden folgenden *Bedingungen* in Kraft:

D I. Die Menge M enthält eine kleinste Zahl. Diese werde mit e bezeichnet.

D II. Für je zwei Zahlen a, b aus M, für die $a > b$ gilt, ist die durch

$$i = a - b + e \tag{11}$$

eindeutig bestimmte Zahl i ebenfalls Element von M.

Der ersten Bedingung genügen sowohl die $\mathfrak{G}$-Bezirke als auch die $\mathfrak{D}$-Bezirke. Für D II gilt das aber im allgemeinen nicht mehr. Wir sind deshalb berechtigt, solche Bezirke, für die D II in Kraft ist, durch besondere Namen auszuzeichnen. Das geschieht in den beiden Erklärungen dieses Paragraphen.

Erklärung 8. Ein der Bedingung D II genügender $\mathfrak{G}$-Bezirk heiße ein *$\mathfrak{GD}$-Bezirk*.

Die in § 2 unter γ) und δ) aufgeführten $\mathfrak{G}$-Bezirke gehören zu der engeren Klasse der $\mathfrak{GD}$-Bezirke. Dagegen sind die in γ') angegebenen $\mathfrak{G}$-Bezirke — vorausgesetzt, daß $n > 2$ ist — und die in δ') angegebenen $\mathfrak{G}$-Bezirke keine $\mathfrak{GD}$-Bezirke. Für γ') folgt das z. B. daraus, daß die gemäß (11) sich für

$$a = h_3, \quad b = h_2, \quad e = h$$

ergebende Zahl i wegen

$$h < h_3 - h_2 + h = d + h \leqq h_1 < h_2, \text{ d. h. } h < i < h_2$$

nicht Element von M ist. Für δ') folgt die Behauptung so: Es sei b eine rationale Zahl derart, daß

$$h' < b < h''$$

ist. Nun wähle man a so, daß gilt

$$h' < a < h'', \quad b < a < b + h' - h$$

oder zusammengefaßt

$$b < a < \min(b + h' - h, h'').$$

Wegen

$$h < a - b + h < h', \text{ d. h. } h < i < h'$$

ist dann die durch (11) bestimmte Zahl i — man beachte, daß $h = e$ ist — nicht Element von M.

In Ergänzung zu Satz 4 gilt:

Satz 8. *Ein $\mathfrak{GD}$-Bezirk geht durch lineare Transformation in einen isomorphen $\mathfrak{GD}$-Bezirk über.*

Beweis. Wegen Satz 4 reicht es aus zu zeigen, daß für das dem Element i aus M vermöge der Transformation

$$x = \varkappa x' + k \qquad (\varkappa > 0;\ k \gtreqless 0) \tag{9}$$

zugeordnete Element i' aus M' die Relation

$$i' = a' - b' + e' \tag{11'}$$

stattfindet. Das ist aber wegen

$$a - b + e = \varkappa(a' - b + e') + k$$

der Fall.

Erklärung 9. Ein der Bedingung D II genügender $\mathfrak{O}$-Bezirk heiße ein $\mathfrak{O}\mathfrak{D}$-*Bezirk*.

Die in § 2 unter ε) und ζ) aufgeführten $\mathfrak{O}$-Bezirke gehören zu der engeren Klasse der $\mathfrak{O}\mathfrak{D}$-Bezirke. Dagegen sind die in ε') und ζ') angegebenen $\mathfrak{O}$-Bezirke keine $\mathfrak{O}\mathfrak{D}$-Bezirke. Das ergibt sich ganz genau so wie bei den soeben betrachteten $\mathfrak{G}$-Bezirken.

In Ergänzung zu Satz 5 — parallel zu Satz 8 — gilt:

Satz 9. *Ein* $\mathfrak{O}\mathfrak{D}$-*Bezirk geht durch lineare Transformation in einen isomorphen* $\mathfrak{O}\mathfrak{D}$-*Bezirk über.*

2. Der Satz 6 kann nunmehr folgendermaßen verschärft werden:

Satz 10. *Ein aus mindestens zwei Zahlen bestehender* $\mathfrak{G}\mathfrak{D}$-*Bezirk ist ein Fundamentalholoid erster Art in bezug auf die durch*

$$a \circ b \equiv \min(a + b - e, f) \tag{10}$$

erklärte Verknüpfung $\circ$.

Beweis. Wegen Satz 6 ist nur noch nachzuweisen, daß die durch (10) definierte Verknüpfung $\circ$ dem Axiom A VI und den in Erklärung 5 aufgestellten Forderungen genügt.

Zu A VI) Ist $a > b$, so wird der Gleichung

$$a = b \circ x, \text{ d. h. } a = \min(b + x - e, f)$$

durch das Element

$$x = a - b + e$$

genügt; ist $b > a$, so wird der Gleichung

$$b = a \circ y, \text{ d. h. } b = \min(a + y - e, f)$$

durch das Element

$$y = b - a + e$$

genügt.

Zu Erklärung 5) Es ist

$$a \circ f \equiv \min(a + f - e, f) = f;$$

die größte Zahl des Bezirks ist also, wie es sein soll, obere Spitze. Ferner ist ein Element x des Bezirks dann und nur dann idempotent, wenn

$$x = \min(2x - e, f)$$

ist, also dann und nur dann, wenn entweder $x = e$ oder $x = f$ ist.

Wir machen noch darauf aufmerksam, daß der in § 2 unter γ') konstruierte $\mathfrak{G}$-Bezirk für $n = 2$ und $n = 3$ ebenfalls ein Fundamentalholoid erster Art[6]) in Übereinstimmung mit Satz 3 ist, wonach jedes Holoid von der ersten, zweiten oder dritten Ordnung linear ist. Dagegen ist ein $\mathfrak{G}$-Bezirk vom Typus γ'), wenn dieser aus mehr als drei Elementen besteht, kein lineares Holoid, also auch kein Fundamentalholoid erster

[6]) Es werde daran erinnert, daß der sich für $n = 2$, aber nicht der sich für $n = 3$ ergebende Bezirk ein $\mathfrak{G}\mathfrak{D}$-Bezirk ist.

Art, wovon man sich folgendermaßen überzeugt: Aus der Gleichung

$$h_3 = h_2 o x, \quad \text{d. h.} \quad h_3 = \min(h_2 + x - h, h_n)$$

folgt, da $h_n > h_3$ ist,

$$h_3 = h_2 + x - h,$$

so daß

$$x = h_3 - h_2 + h = d + h \leqq h_1, \quad \text{d. h.} \quad h < x < h_2$$

ist; somit gehört x dem Bezirk nicht an.

Entsprechend kann der Satz 7 wie folgt verschärft werden:

Satz 11. *Ein* $\mathfrak{OD}$*-Bezirk*[7]) *ist ein Fundamentalholoid zweiter Art in bezug auf die durch*

$$a o b \equiv a + b - e$$

erklärte Verknüpfung o.

Der Beweis ist dem von Satz 10 ähnlich.

§ 4.

Beschränkte Additivität innerhalb der $\mathfrak{G}$-Bezirke. Das Assoziativ.

1. Das Rechnen mit den Zahlen eines endlichen $\mathfrak{GD}$-Bezirks läßt sich als Vorstufe des Rechnens im Bereich der natürlichen Zahlen auffassen. Betrachten wir z. B. den aus den Zahlen

(12) $$0, 1, \ldots, 10$$

gebildeten $\mathfrak{GD}$-Bezirk, für den also

$$a o b \equiv \min(a + b, 10)$$

ist. Hier bedeutet $a o b$ für

$$0 \leqq a + b \leqq 10$$

die gewöhnliche Summe der Zahlen a und b. Für

$$1 \leqq a \leqq 10, \quad 1 \leqq b \leqq 10; \qquad a + b > 10$$

gilt das nicht mehr. In diesem Fall können die Ergebnisse der „Addition" nicht mehr voneinander unterschieden werden; es kommt immer dasselbe heraus, nämlich 10. Diese Zahl spielt gewissermaßen die Rolle von „viel". Während

$$3 o 4 = 7, \quad 8 o 0 = 8$$

ist, gilt

$$2 o 9 = \text{„viel"}, \quad 5 o \text{„viel"} = \text{„viel"}, \quad \text{„viel"} o \text{„viel"} = \text{„viel"}.$$

„Viel" unterliegt also weitgehend den Rechenregeln, denen auch das Symbol ∞ gehorcht. Im $\mathfrak{GD}$-Bezirk (12) kann man sozusagen nur bis 10 zählen. Den Sachverhalt kann man auch so formulieren: Die Vorschrift

(10) $$a o b \equiv \min(a + b - e, f)$$

ist eine Regel, nach der Individuen, denen der Begriff einer beliebig großen Zahl fremd ist, „addieren" können, ohne in Widersprüche zu

[7]) Wie bereits bemerkt, sehen wir von dem trivialen Fall ab, daß nur ein Element vorhanden ist.

geraten. Wir möchten insbesondere die Ethnologen und diejenigen, die sich mit der Erforschung der Kultur der Primitiven befassen, darauf hinweisen. Diese Eigentümlichkeit der $\mathfrak{G}$-Bezirke hängt natürlich damit zusammen, daß für derartige Bereiche das Axiom des *Eudoxos* ungültig ist.

2. Nun noch eine Bemerkung zur Bezeichnungsweise. Ich nenne eine Menge mit einer den beiden Axiomen A I und A II genügenden Elementverknüpfung o ein *Assoziativ*[8]) in bezug auf o. Im mathematischen Schrifttum findet man dafür hin und wieder — der Gegenstand ist bis jetzt nur selten behandelt worden — die Bezeichnung *Halbgruppe*[9]). Diese Benennung, die erkennen läßt, daß der darunter verstandene Begriff im Zuge der Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs gebildet worden ist, hat aber, nachdem die Begriffe Verband, Halbverband und Holoid auf den Plan getreten sind, nicht nur keine Berechtigung mehr, sondern kann sogar zu falschen Vorstellungen führen. Da alle diese Begriffe in gleicher Weise an den Axiomen A I und A II teilhaben, ist die neutrale Bezeichnung Assoziativ ohne Zweifel passender und deshalb vorzuziehen.

Literaturverzeichnis.

H. Hermes und G. Köthe.

[1] Theorie der Verbände. Enzykl. d. Math. Wissensch. I 1, 13; 2. Aufl. (1939).

F. Klein-Barmen.

[A. V. 4] Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung. Math. Zeitschr. **47** (1940), S. 85—104.

[A. V. 5] Molekulare Verbände. Ebenda **47** (1941), S. 373—394.

[H/S. 1] Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Erster Teil. Ebenda **48** (1942), S. 275—288.

[H/S. 2] Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Zweiter Teil. Ebenda **48** (1943), S. 715—734.

W. Magnus.

[1] Allgemeine Gruppentheorie. Enzykl. d. Math. Wissensch. I 1, 9; 2. Aufl. (1939).

H. R. Müller.

[1] Algebraischer Aussagenkalkül. Inaugural-Dissertation (Universität Graz) o. J.

H. Scholz.

[1] Metaphysik als strenge Wissenschaft. Köln 1941.

[2] Was will die formalisierte Grundlagenforschung? Deutsche Math. **7** (1943), S. 206—248.

K. Schröter.

[1] Ein allgemeiner Kalkülbegriff. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissensch. Neue Folge (1941), Heft 6.

[8]) Vgl. [A. V. 4], S. 86 und [H/S. 1], S. 275.

[9]) Vgl. Magnus [1], S. 4 und Schröter [1], S. 16.

(Eingegangen am 16. Mai 1944.)

Die linearen Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren.

Von

W. Specht in Erlangen.

Bezeichnen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Unbestimmte eines allgemeinen, nicht kommutativen Ringes $\mathfrak{R}$, so wird der n-te Kommutator

$$k_n(x) = k_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

bekanntlich durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} k_2(x) &= k_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_2 x_1 \\ (1) \qquad k_n(x) &= k_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= k_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, x_n - x_n\, k_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

schrittweise erklärt. Aus dem Kommutator $k_n(x)$ entstehen nun durch Permutation der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ insgesamt $n!$ Kommutatoren, die indes, wie man leicht erkennt, nicht linear unabhängig sind, da schon für $n = 2,3$ die bekannten linearen Beziehungen

$$k_2(x_1, x_2) + k_2(x_2, x_1) = 0$$
$$k_3(x_1, x_2, x_3) + k_3(x_2, x_3, x_1) + k_3(x_3, x_1, x_2) = 0$$

bestehen. Es ist daher wohl von allgemeinerem Interesse, eine Übersicht über die zwischen diesen Kommutatoren bestehenden linearen Beziehungen zu gewinnen. In den nachfolgenden Betrachtungen soll nachgewiesen werden, daß zwischen den n-ten Kommutatoren eine fundamentale lineare Beziehung besteht, aus der alle weiteren bestehenden linearen Beziehungen in noch näher zu erklärendem Sinne hergeleitet werden können. Die Fundamentalbeziehung selbst läßt sich in sehr einfacher, übersichtlicher Gestalt aufschreiben.

I.

Ist

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

eine Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, n$, so bezeichne ich mit x^P das Produkt

$$(2) \qquad x^P = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n}$$

der n Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$; insbesondere ist also für die identische Permutation E

$$x = x^E = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Unter einer Form verstehe ich weiter einen Ausdruck der Gestalt

$$f(x) = \sum_P f_P x^P, \tag{3}$$

worin die Summe über alle Permutationen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ zu erstrecken ist, mit Koeffizienten f_P, die einem beliebigen, den weiteren Betrachtungen stets zugrundegelegten Körper $\varkappa$ der Charakteristik 0 entnommen sind. Die Unabhängigkeit der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kann dann in dem Sinne schärfer gefaßt werden, daß die Form $f(x)$ nur dann verschwinden soll, wenn sämtliche Koeffizienten f_P Null sind. Ferner verstehe ich unter $f^Q(x)$ mit einer Permutation Q aus $\mathfrak{S}_n$ die Form, die aus $f(x)$ durch Anwendung der Permutation Q auf die Unbestimmten hervorgeht, also unter Benutzung der Darstellung (3) der Form:

$$f^Q(x) = \sum_P f_P x^{PQ} = \sum_P f_{PQ^{-1}} x^P. \tag{4}$$

Die Gesamtheit aller Formen $f(x)$ bildet nach meiner früheren Bezeichnung[1]) einen symmetrischen Modul, den Gesamtmodul Γ, da die Summe zweier Formen wiederum eine Form ist, mit $f(x)$ bei beliebigem Faktor a aus $\varkappa$ auch $af(x)$ eine Form darstellt und schließlich durch Anwendung einer beliebigen Permutation Q aus einer Form $f(x)$ die Form $f^Q(x)$ hervorgeht. Unter einem Teilmodul M des Gesamtmoduls Γ will ich ferner in diesem Zusammenhange eine Teilmenge von Γ verstehen, die im angegebenen Sinne einen symmetrischen Modul bildet.

Ist nun $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$ eine linearunabhängige Basis eines Teilmoduls M von Γ, so erhält man, da die Formen $f_\varrho^P(x)$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$ und eine beliebige Permutation P aus $\mathfrak{S}_n$ wieder dem Modul M angehören, lineare Beziehungen der Gestalt

$$f_\varrho^P(x) = \sum_\sigma d_{\varrho\sigma}^P f_\sigma(x) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r), \tag{5}$$

die in den Matrizen

$$D_P = (d_{\varrho\sigma}^P)$$

des Grades r eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ liefern. Aus der Zerfällbarkeit jeder endlichen Gruppe von Matrizen[2]) entnimmt man demnach die Tatsache, daß zu jedem Teilmodul M von Γ ein Teil-

---

[1]) W. Specht, Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe. Math. Zeitschr. 39 (1935), 696–711.

[2]) Nach dem Satz von Maschke über endliche Gruppen linearer Substitutionen.

modul M' aus Γ angegeben werden kann, so daß in direkter Zerlegung

$$\Gamma = M + M' \tag{6}$$

gilt, daß ferner Γ als direkte Summe

$$\Gamma = M_1 + M_2 + \cdots + M_k \tag{7}$$

unzerlegbarer Moduln dargestellt werden kann, d. h. von Teilmoduln, die keinen symmetrischen Teilmodul außer sich selbst und dem Nullmodul enthalten.

Insbesondere erhält man aus einer festen Form $f(x)$ in der Gesamtheit aller Formen der Gestalt

$$g(x) = \sum_P a_P f^P(x)$$

mit beliebigen Werten a_P aus $\varkappa$ einen Teilmodul, den ich als den durch die Form $f(x)$ bestimmten Teilmodul $M(f(x))$ von Γ bezeichnen will.

Der hier gebrauchte Begriff der Permutation als Operator kann zweckmäßig in folgender Weise weiter gefaßt werden: Einer Form

$$f(x) = \sum_P f_P x^P$$

wird umkehrbar-eindeutig der Operator

$$F = \sum_P f_P P$$

aus dem zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ gehörenden Gruppenring $\mathfrak{o}$ über dem Körper $\varkappa$ zugeordnet, wenn verabredet wird, daß $F = 0$ nur dann gelten soll, falls sämtliche Koeffizienten f_P verschwinden. Es kann dann formal

$$f(x) = x^F$$

geschrieben werden; hierbei gelten die nachstehenden, leicht zu bestätigenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} x^F + x^G &= x^{F+G} \\ (x^F)^G &= x^{FG} \\ a\,x^F &= x^{aF}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ein symmetrischer Teilmodul M des Gesamtmoduls Γ ist nach dem Vorangehenden dadurch gekennzeichnet, daß die Summe $x^{F_1+F_2}$ zweier Formen x^{F_1} und x^{F_2} wieder dem Modul angehört, daß mit x^F auch x^{aF} bei beliebigem a aus $\varkappa$ Form des Moduls ist und daß schließlich mit x^F bei beliebigem Operator G aus $\mathfrak{o}$ auch die Form x^{FG} zum Modul M gehört. Mithin bilden die Operatoren F, die den Formen $f(x)$ eines Teilmoduls M zugeordnet sind, ein Rechtsideal $\mathfrak{r}$ des Gruppenringes $\mathfrak{o}$. Umgekehrt entspricht jedem Rechtsideal $\mathfrak{r}$ des Ringes $\mathfrak{o}$ auch ein Teilmodul M des Gesamtmoduls Γ. Der Zerlegungssatz über den Gesamtmodul Γ liefert demnach die Aussagen:

Zu jedem Rechtsideal $\mathfrak{r}$ des Ringes $\mathfrak{o}$ läßt sich ein Rechtsideal $\mathfrak{r}'$ angeben, so daß

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}';$$

der Ring $\mathfrak{o}$ läßt sich als direkte Summe unzerlegbarer Rechtsideale darstellen:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \cdots + \mathfrak{r}_k,$$

die umkehrbar eindeutig unzerlegbaren Teilmoduln des Gesamtmoduls Γ zugeordnet sind.

Insbesondere entspricht einem idempotenten Operator F des Ringes

$$F^2 = F; \quad F = \sum_P f_P P$$

eine Form $f(x) = \sum_P f_P x^P$, die ich der Kürze wegen in diesem Zusammenhange als idempotente Form bezeichnen will.

Die weiteren Betrachtungen beruhen nun auf dem sehr einfach zu beweisenden Satze:

Satz 1. *Jeder Teilmodul M des symmetrischen Moduls Γ enthält eine bestimmende, idempotente Form $f(x)$, d. h. es läßt sich stets eine idempotente Form $f(x)$ in M angeben, so daß $M = M(f(x))$ ist.*

Zum Beweise zerlege man Γ in der Gestalt

$$\Gamma = M + M';$$

hieraus entnimmt man insbesondere für die Form x des Moduls Γ eine eindeutige Zerlegung

$$x = f(x) + g(x)$$

mit einer Form $f(x)$ aus M, einer Form $g(x)$ aus M'. Geht man zu den entsprechenden Rechtsidealen $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{o}$ über, so gilt

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}',$$

insbesondere für die zugeordneten Operatoren

$$E = F + G,$$

mithin auch

$$F = F^2 + GF.$$

Nach dieser Gleichung ist GF ein Operator aus $\mathfrak{r}$, da aber G zu $\mathfrak{r}'$ gehört, auch aus $\mathfrak{r}'$, demnach $GF = 0$. Somit ist $F^2 = F$.

Bilden wir nun die beiden Moduln $M(f(x))$ und $M(g(x))$, so enthält ihre Summe auch die Form x; daher ist

$$\Gamma = M(f(x)) + M(g(x)).$$

Da aber doch $M(f(x))$ zu M und $M(g(x))$ zu M' gehört, ist $M = M(f(x))$, wie behauptet worden war.

Liegt nun eine Form

$$f(x) = \sum_P f_P x^P$$

des symmetrischen Moduls Γ vor und will man sämtliche linearen Beziehungen

$$\sum_P y_P f^P(x) = 0 \tag{9}$$

bestimmen, die zwischen der Form $f(x)$ und den aus ihr durch Permutation der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hervorgehenden Formen $f^P(x)$ bestehen, so zeigt der Übergang zu den zugeordneten Operatoren

$$F = \sum_P f_P P; \quad Y = \sum_P y_P P,$$

daß es sich offensichtlich um die Aufgabe handelt, alle Operatoren Y zu bestimmen, die die Gleichung

$$FY = 0 \tag{9a}$$

erfüllen. Wie man sofort erkennt, bildet die Gesamtheit dieser Operatoren ein Rechtsideal $\mathfrak{r}'$ des Ringes $\mathfrak{o}$. Der diesem Rechtsideal zugeordnete Teilmodul $M' = M(g(x))$ mit einer beliebig ausgewählten bestimmenden Form

$$g(x) = \sum_P g_P x^P$$

liefert demnach insbesonders die lineare Beziehung

$$\sum_P g_P f^P(x) = 0, \tag{10}$$

aus der, da $g(x)$ bestimmende Form des Moduls M' ist, alle anderen linearen Beziehungen hergeleitet werden können. Die Existenz einer solchen bestimmenden Form ist ja durch Satz 1 gesichert.

Die Herleitung aller zwischen den Formen $f^P(x)$ bestehenden linearen Beziehungen kann mit Hilfe der Fundamentalbeziehung (10) noch genauer angegeben werden. Jede dieser linearen Beziehungen kann in der Gestalt

$$\sum_{P,Q} a_Q g_P f^{PQ}(x) = 0 \tag{11}$$

oder auch durch Änderung der Summierung

$$\sum_{P,Q} a_{Q^{-1}P} g_Q f^P(x) = 0 \tag{11a}$$

dargestellt werden mit beliebigen Koeffizienten a_Q aus $\varkappa$, wobei P, Q unabhängig voneinander sämtliche Permutationen zu durchlaufen haben.

Somit haben wir das Ergebnis erhalten:

Satz 2. *Zwischen den durch Permutation der Unbestimmten aus einer Form $f(x)$ des symmetrischen Moduls Γ hervorgehenden Formen $f^P(x)$ besteht, sofern sie nicht überhaupt linear unabhängig sind, stets eine lineare Fundamentalbeziehung*

$$\sum_P g_P f^P(x) = 0,$$

aus der alle anderen geltenden linearen Beziehungen im angegebenen Sinne hergeleitet werden können.

Ist insbesondere die Form $f(x) = \sum f_P x^P$ idempotent, so besteht für den zugeordneten Operator F die Gleichung

$$F^2 = F \quad \text{oder} \quad F(E-F) = 0.$$

Andererseits gilt für jeden Operator Y, der die Gleichung $FY = 0$ erfüllt, offenbar

$$Y = Y - FY = (E-F)Y.$$

Daher ist $E-F$ erzeugender Operator, d. h. für das Rechtsideal $\mathfrak{r}'$ aller Y gilt die Gleichung

$$\mathfrak{r}' = (E-F)\mathfrak{o}.$$

Somit hat die lineare Fundamentalbeziehung für eine idempotente Form $f(x) = \sum_P f_P x^P$ die einfache Gestalt

$$f(x) = f^F(x)$$

oder

$$f(x) = \sum_P f_P f^P(x). \tag{12}$$

II.

Um die bisherigen Untersuchungen im Sonderfall auf den n-ten Kommutator $k_n(x) = k_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ anwenden zu können, haben wir zunächst den zugeordneten Operator K_n zu bestimmen. Es ist, wie wir eingangs bereits angaben:

$$k_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, x_n - x_n k_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Ist daher K_{n-1} der der Form $k_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})x_n$ zugeordnete Operator, so entsteht offenbar die Form $x_n k_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ aus der Form $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ durch den Operator $U_n K_{n-1}$, wenn U_n den n-gliedrigen Zyklus

$$U_n = (n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1) \tag{13}$$

bezeichnet. Mithin ist

$$K_n = K_{n-1} - U_n K_{n-1} = (E - U_n) K_{n-1}. \tag{14}$$

Bezeichnen wir daher allgemein mit $U_\varkappa$ den $\varkappa$-gliedrigen Zyklus

$$U_\varkappa = (\varkappa, \varkappa-1, \ldots, 2, 1); \quad U_1 = E \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n),$$

so kann der Operator K_n in der einfachen Gestalt

$$K_n = (E - U_n)(E - U_{n-1}) \ldots (E - U_2) \tag{14a}$$

dargestellt werden.

Aus der für diesen Operator K_n bestehenden Gleichung

$$K_n^2 = n K_n, \tag{15}$$

die gleich anschließend bewiesen werden soll, folgt leicht der nachstehende Satz, der die zu Anfang gestellte Aufgabe löst:

Satz 3. *Wird der n-te Kommutator in der Gestalt*

$$k_n(x) = \sum_P c_P x^P$$

geschrieben, so besteht zwischen den n-ten Kommutatoren die lineare Fundamentalbeziehung

(16) $$n\,k_n(x) = \sum_P c_P k_n^P(x);$$

alle anderen zwischen den n-ten Kommutatoren geltenden linearen Beziehungen lassen sich aus dieser herleiten.

Aus der Gleichung (15) folgt nämlich, daß der Operator $\frac{1}{n} K_n$, also die Form $\frac{1}{n} k_n(x)$ idempotent ist. Da aber $\frac{1}{n} k_n(x)$ und $k_n(x)$ den gleichen Teilmodul von Γ bestimmen, geht die Behauptung des Satzes 3 unmittelbar aus den allgemeinen Betrachtungen des Abschnittes I hervor. Somit bleibt allein noch als Aufgabe der Nachweis der in (15) angegebenen Beziehung.

Um diesen Nachweis durchsichtig gestalten zu können, führen wir eine Reihe vorbereitender Schritte durch, die die notwendigen Rechnungen mit den Symbolen U_ν vereinfachen: Es gilt

(17) $$U_\varkappa U_\lambda = U_\lambda^2 U_{\lambda-1}^{-1} U_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa < \lambda).$$

Unmittelbare Rechnung zeigt nämlich

$$\begin{aligned} U_\lambda^{-1} U_\varkappa U_\lambda &= (1, 2, \ldots, \lambda)\,(\varkappa, \varkappa-1, \ldots, 2, 1)\,(\lambda, \lambda-1, \ldots, 2, 1) \\ &= (\varkappa-1, \varkappa-2, \ldots, 2, 1, \lambda) \\ U_\lambda U_{\lambda-1}^{-1} &= (\lambda, \lambda-1, \ldots, 2, 1)\,(1, 2, \ldots, \lambda-1) = (1, \lambda) \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} U_\lambda U_{\lambda-1}^{-1} U_{\varkappa-1} &= (1, \lambda)\,(\varkappa-1, \ldots, 2, 1) = (\varkappa-1, \ldots, 2, 1, \lambda) \\ &= U_\lambda^{-1} U_\varkappa U_\lambda. \end{aligned}$$

Ferner gilt

(18) $$U_\varkappa U_\lambda^{-1} = U_\lambda^{-1} U_{\varkappa+1}' U_\varkappa^{-1} \qquad (\varkappa < \lambda).$$

Denn zunächst ist

$$\begin{aligned} U_\lambda U_\varkappa U_\lambda^{-1} &= (\varkappa+1, \varkappa, \ldots, 3, 2) \\ U_2 U_\lambda U_\varkappa U_\lambda^{-1} &= (1, 2)\,(\varkappa+1, \ldots, 3, 2) = U_{\varkappa+1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$U_\varkappa U_\lambda^{-1} = U_\lambda^{-1} U_2 U_{\varkappa+1} = U_\lambda^{-1} U_{\varkappa+1}^2 U_\varkappa^{-1} \qquad \text{nach (17).}$$

Schließlich gilt

(19) $$U_\varkappa^{-1} U_\lambda^{-1} = U_\lambda^{-1} U_{\varkappa+1}^{-1} U_2 \qquad (\varkappa > \lambda).$$

Soeben hatten wir nämlich die Beziehung

$$U_\lambda U_\varkappa U_\lambda^{-1} = U_2 U_{\varkappa+1}$$

gewonnen; der Übergang zur Inversen liefert

$$U_\lambda U_\varkappa^{-1} U_\lambda^{-1} = U_{\varkappa+1}^{-1} U_2$$

und damit die Behauptung.

Aus diesen einfachen Rechenregeln erhält man nun durch vollständige Induktion für die Behandlung der Aufgabe notwendige Beziehungen:

(20) $$U_n^k U_2 U_n^{-k} = U_{k+1}^{-1} U_{k+2} \qquad \text{für } 1 \leqq k \leqq n-2.$$

Nach (18) ist nämlich

$$U_n U_2 U_n^{-1} = U_3^2 U_2^{-1} = U_3^{-1} U_2 = U_2^{-1} U_3.$$

Daher kann die Gleichung

$$U_n^k U_2 U_n^{-k} = U_{k+1}^{-1} U_{k+2}$$

als bewiesen angenommen werden; es folgt dann

$$\begin{aligned} U_n^{k+1} U_2 U_n^{-k-1} &= U_n U_{k+1}^{-1} U_{k+2} U_n^{-1} \\ &= U_n U_{k+1}^{-1} U_n^{-1} U_{k+3}^2 U_{k+2}^{-1} && \text{nach (18)} \\ &= U_{k+2}^{-1} U_2 U_{k+3}^2 U_{k+2}^{-1} && \text{nach (19)} \\ &= U_{k+2}^{-1} U_2 U_2 U_{k+3} && \text{nach (17)} \\ &= U_{k+2}^{-1} U_{k+3}, \end{aligned}$$

wie zu zeigen war. Ebenso einfach erhält man

(21) $$U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} U_n^{-1} = U_{k+1}^{-1} \qquad \text{für } 1 \leqq k \leqq n-1.$$

Für $k = 1$ geht dies in die bereits aus (17) bekannte Beziehung

$$U_n^2 U_{n-1}^{-1} U_n^{-1} = U_2$$

über; daher kann die Gleichung

$$U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} U_n^{-1} = U_{k+1}^{-1}$$

als bewiesen angenommen werden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} U_{k+2} U_n^{k+2} U_{n-1}^{-k-1} U_n^{-1} &= U_{k+2} U_n^{k+2} U_{n-1}^{-1} U_n^{-k-1} U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} U_n^{-1} \\ &= U_{k+2} U_n^{k+2} U_{n-1}^{-1} U_n^{-k-1} U_{k+1}^{-1} \\ &= U_{k+2} U_n^k U_2 U_n U_n^{-k-1} U_{k+1}^{-1} && \text{nach (17)} \\ &= U_{k+2} U_{k+1}^{-1} U_{k+2} U_{k+1}^{-1} && \text{nach (20)} \\ &= E && \text{nach (18).} \end{aligned}$$

Nun sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ eine beliebige Ziffernreihe, die die Bedingung

$$2 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k \leqq n$$

erfüllt. Offenbar ist dabei stets

$$\alpha_\varkappa > \varkappa \qquad \text{für } \varkappa = 1, 2, \ldots, k.$$

Dann besteht die Beziehung

$$(22)\quad U_{\alpha_k} U_{\alpha_{k-1}} \dots U_{\alpha_2} U_{\alpha_1} U_n = U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} U_{\alpha_k - 1} U_{\alpha_{k-1} - 1} \dots U_{\alpha_2 - 1} U_{\alpha_1 - 1}.$$

Zum Beweise setzen wir den Ausdruck

$$S = U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} U_{\alpha_k - 1} \dots U_{\alpha_1 - 1} U_n^{-1} U_{\alpha_1}^{-1} U_{\alpha_2}^{-1} \dots U_{\alpha_k}^{-1}$$

an und ziehen das in der Mitte des Ausdruckes stehende U_n^{-1} mittels der Beziehung (18) nach links hindurch. Dabei erhalten wir

$$S = U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} U_n^{-1} U_{\alpha_k}^{2} U_{\alpha_k - 1}^{-1} \dots U_{\alpha_2}^{2} U_{\alpha_2 - 1}^{-1} U_{\alpha_1}^{2} U_{\alpha_1 - 1}^{-1} U_{\alpha_1}^{-1} U_{\alpha_2}^{-1} \dots U_{\alpha_k}^{-1}.$$

Nach (21) ist aber

$$U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} U_n^{-1} = U_{k+1}^{-1};$$

daher genügt es zu zeigen, daß

$$(23)\quad U_{\alpha_\varrho}^{2} U_{\alpha_\varrho - 1}^{-1} U_\varrho U_{\alpha_\varrho}^{-1} = U_{\varrho+1} \qquad (\varrho = 1, 2, \dots, k)$$

ist. Denn es gilt nach (17)

$$U_{\alpha_1}^{2} U_{\alpha_1 - 1}^{-1} U_{\alpha_1}^{-1} = U_1;$$

daher erhält man aus (23) schrittweise für S die Gleichung $S = E$ als Bestätigung der Behauptung (22). Aus (17) folgt aber unmittelbar wegen $\alpha_\varrho > \varrho$

$$U_{\alpha_\varrho}^{2} U_{\alpha_\varrho - 1}^{-1} U_\varrho U_{\alpha_\varrho}^{-1} = U_{\varrho+1} U_{\alpha_\varrho} U_{\alpha_\varrho}^{-1} = U_{\varrho+1}.$$

Für die weitere Durchführung der Rechnungen empfiehlt es sich nun, vorübergehend andere Bezeichnungen einzuführen: Ich setze

$$\begin{aligned}
C &= (E - U_n)(E - U_{n-1}) \dots (E - U_1) \\
C^* &= (E - U_{n-1})(E - U_{n-2}) \dots (E - U_1) \\
C_k &= \Sigma U_{\alpha_k} U_{\alpha_{k-1}} \dots U_{\alpha_1} \qquad 2 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leqq n \\
C_k^* &= \Sigma U_{\alpha_k} U_{\alpha_{k-1}} \dots U_{\alpha_1} \qquad 2 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leqq n-1.
\end{aligned}$$

Dabei ist, wie man leicht erkennt

$$\begin{aligned}
C &= (E - U_n) C^* = C^* - U_n C^* \\
C_k &= U_n C_{k-1}^* + C_k^* \qquad \text{für } k = 1, 2, \dots, n-2 \\
C_{n-1} &= U_n C_{n-2}^*.
\end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$C = E - C_1 + C_2 - C_3 + - \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}.$$

Die Gleichung (15) nimmt in der neuen Bezeichnung die Gestalt an:

$$C^2 = nC;$$

sie folgt sogleich aus der schärferen Behauptung

$$(24)\quad C_k C = (-1)^k C,$$

da nach dieser Beziehung offenbar

$$C^* = C - C_1 C + C_2 C - + \cdots + (-1)^{n-1} C_{n-1} C = nC$$

erhalten wird. Die Beziehung (24) aber geht durch vollständige Induktion leicht aus den Beziehungen

$$C_k U_n = U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} (C_k^* + C_{k-1}^*) \qquad (C_{n-1}^* = 0) \tag{25}$$

hervor, die ihrerseits unmittelbar aus (22) folgen, da $C_k U_n$ die Summe aller Ausdrücke

$$U_{\alpha_k} U_{\alpha_{k-1}} \dots U_{\alpha_2} U_{\alpha_1} U_n$$

darstellt. Ist hierin $\alpha_1 = 2$, so liefert dieses Glied in (25) einen Beitrag zu $U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} C_{k-1}^*$, im anderen Falle einen Beitrag zu $U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} C_k^*$. Daß wirklich alle Summanden dieser beiden Summen vorkommen und nur diese, läßt sich wegen der Verschiedenheit aller dieser Ausdrücke und aus der bekannten Beziehung zwischen Binomialkoeffizienten einfach abzählen.

Es sind daher nur noch mit Hilfe der Gleichungen (25) die Gleichungen (24) zu beweisen. Für $n = 2$ gilt

$$C = E - U_2; \quad C_1 = U_2$$
$$C_1 C = U_2 (E - U_2) = U_2 - E = -C.$$

Daher kann die Beziehung

$$C_k^* C^* = (-1)^k C^* \qquad (k = 1, 2, \dots, n-2)$$

als bewiesen vorausgesetzt werden. Es folgt dann für jedes k dieser Reihe

$$\begin{aligned} C_k C &= C_k (C^* - U_n C^*) = C_k C^* - C_k U_n C^* \\ &= (C_k^* + U_n C_{k-1}^*) C^* - U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} (C_k^* + C_{k-1}^*) C^* \\ &= C_k^* C^* + U_n C_{k-1}^* C^* - U_n^{k+1} U_{n-1}^{-k} ((-1)^k C^* + (-1)^{k-1} C^*) \\ &= (-1)^k (C^* - U_n C^*) = (-1)^k C. \end{aligned}$$

Der schließlich noch verbleibende Fall $k = n-1$ folgt leicht aus

$$\begin{aligned} C_{n-1} C &= C_{n-1} (C^* - U_n C^*) = C_{n-1} C^* - C_{n-1} U_n C^* \\ &= U_n C_{n-2}^* C^* - U_n^n U_{n-1}^{-n+1} C_{n-2}^* C^* \\ &= (-1)^{n-2} U_n C^* - (-1)^{n-2} C^* = (-1)^{n-1} (C^* - U_n C^*) \\ &= (-1)^{n-1} C. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz 3 vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 2. April 1944.)

Beiträge zur Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe.

Von

W. Specht in Erlangen.

In den nachfolgenden Betrachtungen wird unter dem Zeichen $\mathfrak{X}$ stets eine Matrix, die *Veränderlichenmatrix*

$$(1) \qquad \mathfrak{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

in n Zeilen und m Spalten verstanden, deren Elemente $x_{\nu\mu}$ als unabhängige komplexe Veränderliche aufzufassen sind. Als *Form* $f(\mathfrak{X})$ der Matrix $\mathfrak{X}$ bezeichnen wir jeden Ausdruck der Gestalt

$$(2) \qquad f(\mathfrak{X}) = \sum C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} x_{\alpha_1 1} x_{\alpha_2 2} \dots x_{\alpha_m m}$$

mit komplexen Koeffizienten $C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}$, worin über alle Systeme α_1, α_2, $\dots$, α_m zu summieren ist, die den Ungleichungen

$$1 \leqq \alpha_\mu \leqq n \qquad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

genügen. Eine Form $f(\mathfrak{X})$ ist also eine homogene ganzrationale Funktion der Elemente $x_{\nu\mu}$ von $\mathfrak{X}$, die in den Elementen jeder Spalte von $\mathfrak{X}$ homogen und linear ist. Wendet man auf die Matrix $\mathfrak{X}$ eine lineare Transformation

$$\mathfrak{Y} = A\mathfrak{X}$$

an, wobei A eine reguläre[1]) Matrix des Grades n, $\mathfrak{Y}$ eine zweite Veränderlichenmatrix bedeutet, so entsteht aus der Form $f(\mathfrak{X})$ die Form

$$f(\mathfrak{Y}) = f(A\mathfrak{X}),$$

deren Entwicklung

$$f(A\mathfrak{X}) = \sum C^A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} x_{\alpha_1 1} x_{\alpha_2 2} \dots x_{\alpha_m m}$$

Koeffizienten besitzt, die homogene ganzrationale Funktionen der

[1]) Eine Matrix heißt regulär, wenn ihre Determinante von Null verschieden ist.

Elemente der Matrix A sind. Ebenso liefert eine Transformation

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X} P$$

mit einer m-reihigen Permutationsmatrix[2]) eine neue Form

$$f(\mathfrak{Y}) = f(\mathfrak{X} P)$$

der Veränderlichenmatrix $\mathfrak{X}$, da diese Transformation lediglich eine Permutation der Spalten von $\mathfrak{X}$ bewirkt.

Bezeichnet nun $\mathfrak{G}_n$ die *allgemeine lineare Gruppe* des Grades n, d. h. die Gruppe aller regulären Matrizen

$$A = (a_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

aus komplexen Zahlen $a_{\varkappa\lambda}$, so verstehe ich unter einem *Formenmodul* M eine Menge von Formen $f(\mathfrak{X})$ der Veränderlichenmatrix $\mathfrak{X}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Ist $f(\mathfrak{X})$ eine Form aus M, so ist für jede komplexe Zahl α auch $\alpha f(\mathfrak{X})$ eine Form aus M;

2. Sind $f_1(\mathfrak{X})$, $f_2(\mathfrak{X})$ zwei Formen aus M, so ist auch $f_1(\mathfrak{X}) + f_2(\mathfrak{X})$ eine Form aus M;

3. Ist $f(\mathfrak{X})$ eine Form aus M, so ist für jede Matrix A aus $\mathfrak{G}_n$ auch $f(A\mathfrak{X})$ eine Form aus M;

4. Ist

$$f_1(\mathfrak{X}), f_2(\mathfrak{X}), \ldots, f_k(\mathfrak{X}), \ldots$$

eine konvergente Folge von Formen aus M, so gehört auch die Grenzform

$$f(\mathfrak{X}) = \lim_{k \to \infty} f_k(\mathfrak{X})$$

zu M.

Dabei wollen wir eine Folge von Formen

$$f_k(\mathfrak{X}) = \sum C^{(k)}_{a_1 a_2 \ldots a_m} x_{a_1 1} x_{a_2 2} \ldots x_{a_m m}$$

konvergent nennen, wenn für jede Indizesreihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Folge der Koeffizienten $C^{(k)}_{a_1 a_2 \ldots a_m}$ konvergiert; ist dabei

$$C_{a_1 a_2 \ldots a_m} = \lim C^{(k)}_{a_1 a_2 \ldots a_m},$$

so bezeichnet $f(\mathfrak{X}) = \lim f_k(\mathfrak{X})$ die Form

$$f(\mathfrak{X}) = \sum C_{a_1 a_2 \ldots a_m} x_{a_1 1} x_{a_2 2} \ldots x_{a_m m}.$$

Die Menge Γ aller Formen $f(\mathfrak{X})$ der Matrix $\mathfrak{X}$ ist offenbar ein Formenmodul vom Range m^n, da die Potenzprodukte $x_{a_1 1} x_{a_2 2} \ldots x_{a_m m}$

[2]) Unter einer Permutationsmatrix oder Permutation P wird hier stets die Matrix verstanden, die der linearen Substitution

$$x'_{a\mu} = x_{a_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

mit der Permutation $P = \binom{\mu}{a_\mu}$ entspricht.

eine linear unabhängige Basis bilden. Diesen Modul Γ werden wir auch als den *Gesamtmodul* bezeichnen. Jeder Formenmodul M ist ein Teilmodul von Γ und besitzt demzufolge einen endlichen Rang, weshalb er stets durch eine endliche linear unabhängige Basis aufgespannt werden kann. Als *Teilmodul* eines Formenmoduls wird weiterhin stets in üblicher Weise nur eine Teilmenge dieses Moduls angesehen, die für sich einen Formenmodul bildet, also die vier angegebenen Eigenschaften besitzt. Sind $g_1(\mathfrak{X})$, $g_2(\mathfrak{X})$, ..., $g_k(\mathfrak{X})$ vorgegebene Formen der Matrix $\mathfrak{X}$, so bezeichne $\mathsf{M}(g_1(\mathfrak{X}), g_2(\mathfrak{X}), \ldots, g_k(\mathfrak{X}))$ den Durchschnitt aller Formenmoduln, die diese Formen enthalten; diesen Modul wollen wir als den durch die Formen $g_\varkappa(\mathfrak{X})$ *bestimmten* Formenmodul bezeichnen. Ein unzerlegbarer Formenmodul M, d. h. ein Modul, der keinen echten Teilmodul enthält, wird demgemäß durch jede seiner (nicht identisch verschwindenden) Formen $f(\mathfrak{X})$ bestimmt; in diesem Falle ist also $\mathsf{M} = \mathsf{M}(f(\mathfrak{X}))$. Es ist aber, wie man leicht durch Beispiele zeigen kann, nicht möglich, jeden Formenmodul M durch eine einzige, geeignet gewählte Form zu bestimmen; man muß zur Bestimmung eines Moduls im allgemeinen mehrere Formen des Moduls heranziehen.

Ist nun M ein beliebiger Formenmodul,

$$f_1(\mathfrak{X}),\ f_2(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ f_r(\mathfrak{X})$$

eine linear unabhängige Basis von M, so ist für jede Matrix A aus $\mathfrak{G}_n$ die Reihe der Formen

$$f_1(A\mathfrak{X}),\ f_2(A\mathfrak{X}),\ \ldots,\ f_r(A\mathfrak{X})$$

im Modul M enthalten. Daher bestehen lineare Beziehungen der Gestalt

$$f_\varrho(A\mathfrak{X}) = \sum_\sigma d_{\varrho\sigma}(A) f_\sigma(\mathfrak{X}) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r), \tag{3}$$

worin die Koeffizienten $d_{\varrho\sigma}(A)$ homogene ganzrationale Funktionen der Dimension m in den Elementen $a_{\varkappa\lambda}$ der Matrix A sind. Aus den Gleichungen

$$f_\varrho(AB\mathfrak{X}) = \sum_\sigma d_{\varrho\sigma}(A) f_\sigma(B\mathfrak{X}) = \sum_{\sigma,\tau} d_{\varrho\sigma}(A)\, d_{\sigma\tau}(B) f_\tau(\mathfrak{X})$$

und

$$f_\varrho(AB\mathfrak{X}) = \sum_\tau d_{\varrho\tau}(AB) f_\tau(\mathfrak{X})$$

folgt weiter die Matrixgleichung

$$D(A)\,D(B) = D(AB),$$

wenn

$$D(A) = (d_{\varrho\sigma}(A))$$

gesetzt wird. Somit liegt in den Matrizen $D(A)$ eine *homogene ganz-*

rationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ *von der Dimension* m vor[3]). Wir nennen diese Darstellung $D(A)$ *die von dem Formenmodul* M *erzeugte Darstellung* der Gruppe $\mathfrak{G}_n$. Diese Ausdrucksweise ist deshalb berechtigt, weil zwei verschiedene linear unabhängige Basen des gleichen Moduls ähnliche, also nicht wesentlich verschiedene Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ liefern.

Jede ganzrationale Darstellung $D(A)$ der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ ist nun bekanntlich[4]) vollreduzibel. Wird durch eine geeignete konstante Matrix $M = (m_{\varrho\sigma})$ die Darstellung $D(A)$ in der Gestalt

$$M D(A) M^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(A) & 0 \\ 0 & D_2(A) \end{pmatrix} = C(A)$$

zerfällt, so erzeugt die neue Basis

$$g_\varrho(\mathfrak{X}) = \sum_\sigma m_{\varrho\sigma} f_\sigma(\mathfrak{X}) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r)$$

des Moduls M die Darstellung $C(A)$. Somit kann der Modul als direkte Summe

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2$$

zweier echter Teilmoduln dargestellt werden, von denen M_1 die Darstellung $D_1(A)$, M_2 die Darstellung $D_2(A)$ erzeugt. Aus der vollen Reduzibilität der ganzrationalen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ erhält man demnach für die Formenmoduln M die folgende Bemerkung:

Ist M *ein Formenmodul,* M_1 *ein echter Teilmodul von* M, *so gibt es stets einen echten Teilmodul* M_2 *von* M, *so daß* M *die Darstellung* $\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2$ *als direkte Summe zuläßt. Insbesondere ist jede Form* $f(\mathfrak{X})$ *eindeutig als Summe*

$$f(\mathfrak{X}) = f_1(\mathfrak{X}) + f_2(\mathfrak{X})$$

einer Form $f_1(\mathfrak{X})$ *aus* M_1 *und einer Form* $f_2(\mathfrak{X})$ *aus* M_2 *darstellbar.*

Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit beschäftigen sich hauptsächlich mit der Aufstellung eines Verfahrens zur Bestimmung der irreduziblen Bestandteile der durch einen Formenmodul M erzeugten homogenen ganzrationalen Darstellung $D(A)$ der allgemeinen linearen Gruppe. Insbesondere handelt es sich also um die Angabe eines möglichst einfachen Kriteriums zur Entscheidung der Frage, ob eine bestimmte irreduzible Darstellung in dieser Darstellung $D(A)$ vorkommt oder nicht. Darüber hinaus werden wir ein Verfahren entwickeln, das gestattet, denjenigen Teilmodul M_1 des Moduls M zu bestimmen, der das genaue Vielfache einer bestimmten irreduziblen

[3]) Für alle Begriffe der Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe verweise ich auf: I. Schur, Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe. Sitzungsber. Akad. Berlin **1927**, S. 58—75. (Weiterhin mit Schur zitiert.)

[4]) Vgl. Schur, Satz I.

Darstellung[5]) erzeugt, das in der Darstellung $D(A)$ enthalten ist. Schließlich werden wir für einen besonderen Typus von Formenmoduln eine wesentlich einfachere Lösung dieser Aufgaben angeben, die auf dem Umstand beruht, daß in diesem Falle die Charakteristik der erzeugten Darstellung direkt angegeben werden kann. Die Kenntnis der Charakteristik einer Darstellung ermöglicht aber genaue Aussagen über die Zerlegung in irreduzible Bestandteile.

I.

Es sei $Z = (z_{\varkappa\lambda})$ eine n-reihige Matrix, deren Elemente $z_{\varkappa\lambda}$ als komplexe Veränderliche

$$z_{\varkappa\lambda} = z'_{\varkappa\lambda} + i\, z''_{\varkappa\lambda}$$

aufzufassen sind, weiter $\bar{Z} = (\bar{z}_{\varkappa\lambda})$ die konjugiert-komplexe Matrix zu Z und $\vartheta(Z)$ der Ausdruck

$$\vartheta(Z) = \sum_{\varkappa,\lambda} |z_{\varkappa\lambda}|^2 = \sum_{\varkappa,\lambda} (z'^2_{\varkappa\lambda} + z''^2_{\varkappa\lambda}).$$

Ist $f(Z)$ eine Funktion der Elemente $z_{\varkappa\lambda}$ von Z, so verstehen wir unter dem Zeichen

$$\int f(Z)\,|Z\bar{Z}|^m\, dZ \tag{4}$$

das über den Bereich $0 \leqq \vartheta(Z) \leqq 1$ erstreckte $2n^2$-fache Integral

$$\int f(Z)\,|Z\bar{Z}|^m\, dz'_{11}\, dz'_{12} \ldots dz'_{nn}\, dz''_{11}\, dz''_{12} \ldots dz''_{nn},$$

wobei m eine natürliche Zahl und $|Z|$ wie üblich die Determinante der Matrix Z bezeichnet. Liegt eine Matrix

$$F(Z) = (f_{\alpha\beta}(Z))$$

von Funktionen $f_{\alpha\beta}(Z)$ der Elemente $z_{\varkappa\lambda}$ von Z vor, und ist

$$g_{\alpha\beta} = \int f_{\alpha\beta}(Z)\,|Z\bar{Z}|^m\, dZ,$$

so bezeichne $\int F(Z)\,|Z\bar{Z}|^m\, dZ$ die Matrix

$$G = (g_{\alpha\beta}).$$

Das Integral (4) hat die Eigenschaft, daß für jede unitäre Matrix U die Gleichung[6])

$$\int f(UZ)\,|Z\bar{Z}|^m\, dZ = \int f(ZU)\,|Z\bar{Z}|^m\, dZ = \int f(Z)\,|Z\bar{Z}|^m\, dZ \tag{5}$$

besteht. Insbesondere ist das Integral

$$h = \int |Z\bar{Z}|^m\, dZ \tag{6}$$

---

[5]) Unter einem Vielfachen einer irreduziblen Darstellung $D(A)$ verstehe ich eine Darstellung, die $D(A)$ als einzigen (möglicherweise mehrfachen) irreduziblen Bestandteil enthält.

[6]) Vgl. Schur, § 4.

eine positive Zahl, für die wir durchweg das Zeichen h verwenden. Schließlich geben wir noch den nachstehenden Satz an, von dem mehrmals Gebrauch gemacht wird [7]):

Hilfssatz. *Eine homogene ganzrationale Funktion $f(Z)$ der Matrix Z, die für alle unitären Matrizen $Z = U$ verschwindet, ist identisch Null.*

Sind nun $C(A)$ und $D(A)$ zwei beliebige homogene ganzrationale Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ von der Dimension m [8]), ist also

$$C(AB) = C(A)C(B); \quad D(AB) = D(A)D(B)$$

für jedes Paar regulärer Matrizen A, B und setzen wir mit einer beliebigen Matrix U in der passenden Anzahl der Zeilen und Spalten

$$C^{-1}(Z)UD(Z) = F(Z), \tag{7}$$

so gilt für die Matrix [9])

$$V = \int F(Z)|Z\bar{Z}|^m dZ \tag{8}$$

die Gleichung

$$C(A)V = VD(A) \tag{9}$$

für jede Matrix A der Gruppe $\mathfrak{G}_n$. Zum Beweise bilden wir mit einer beliebigen Matrix A aus $\mathfrak{G}_n$ das Integral

$$V_1 = \int F(ZA)|Z\bar{Z}|^m dZ$$

mit dem Integranden

$$F(ZA) = C^{-1}(ZA)UD(ZA) = C(A^{-1})F(Z)D(A),$$

für das die Gleichungen bestehen:

$$V_1 = \int F(ZA)|Z\bar{Z}|^m dZ = \int C(A^{-1})F(Z)D(A)|Z\bar{Z}|^m dZ$$
$$= C(A^{-1})\left(\int F(Z)|Z\bar{Z}|^m dZ\right)D(A) = C(A^{-1})VD(A).$$

Mithin gilt die Gleichung

$$C(A)V_1 = VD(A)$$

für jede Matrix A aus $\mathfrak{G}_n$. Nun ist für jede unitäre Matrix A

$$V_1 = \int F(ZA)|Z\bar{Z}|^m dZ = \int F(Z)|Z\bar{Z}|^m dZ = V,$$

---

[7]) Vgl. I. Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. Sitzungsber. Akad. Berlin **1924**, S. 189—208, § 1 des ersten Teils.

[8]) Weiterhin wird unter einer Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ stets eine homogene ganzrationale der Dimension m verstanden.

[9]) Das Integral hat einen Sinn, da die Matrix

$$F(Z)|Z\bar{Z}|^m = C(Z^{-1})UD(Z)|Z\bar{Z}|^m$$

aus ganzrationalen Funktionen der $z_{\varkappa\lambda}$ besteht.

weshalb für jede unitäre Matrix A die Gleichung

$$C(A)\,V = VD(A)$$

besteht. Da auf beiden Seiten dieser Gleichung Matrizen stehen, deren Elemente homogene rationale Funktionen der Elemente $a_{\varkappa\lambda}$ von A der Dimension m sind, gilt diese Gleichung für alle regulären Matrizen.

Sind insbesondere $C(A)$ und $D(A)$ zwei wesentlich verschiedene irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{G}_n$, so besteht zwischen ihnen keine Verkettung[10]). Es muß also $V = 0$ sein, weshalb wegen (7) und (8) die Gleichung

$$\int C(Z^{-1})\,U\,D(Z)\,|Z\bar{Z}|^m\,dZ = 0$$

besteht. Setzen wir

$$C(Z) = (c_{\alpha\beta}(Z));\quad D(Z) = (d_{\gamma\delta}(Z));\quad U = (u_{\beta\gamma}),$$

so erhalten wir hieraus

$$\int [\sum_{\beta,\gamma} c_{\alpha\beta}(Z^{-1})\,u_{\beta\gamma}\,d_{\gamma\delta}(Z)]\,|Z\bar{Z}|^m\,dZ$$
$$= \sum_{\beta,\gamma} \int c_{\alpha\beta}(Z^{-1})\,u_{\beta\gamma}\,d_{\gamma\delta}(Z)\,|Z\bar{Z}|^m\,dZ = 0,$$

woraus durch einfache Rechnung für jedes Paar von Matrizen A_1 und A_2 aus $\mathfrak{G}_n$ auch

$$\sum_{\beta,\gamma} \int c_{\alpha\beta}(A_1 Z^{-1})\,u_{\beta\gamma}\,d_{\gamma\delta}(Z\,A_2)\,|Z\bar{Z}|^m\,dZ = 0$$

folgt. Da dies für alle Matrizen U gilt, ergeben sich schließlich die Relationen

$$\int c_{\alpha\beta}(A_1 Z^{-1})\,d_{\gamma\delta}(Z\,A_2)\,|Z\bar{Z}|^m\,dZ = 0 \tag{10}$$

für jede Reihe von Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Für die Charakteristiken[11])

$$\varphi(Z) = \sum_{\alpha} c_{\alpha\alpha}(Z);\quad \varphi_1(Z) = \sum_{\gamma} d_{\gamma\gamma}(Z)$$

der beiden irreduziblen Darstellungen folgt hieraus durch einfache Summierung der

Satz 1. *Zwischen den Charakteristiken $\varphi(Z)$, $\varphi_1(Z)$ zweier wesentlich verschiedener irreduzibler Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ besteht für beliebige Matrizen A_1, A_2 dieser Gruppe die Relation*

$$\int \varphi(A_1 Z^{-1})\,\varphi_1(Z\,A_2)\,|Z\bar{Z}|^m\,dZ = 0. \tag{11}$$

Im Falle, daß in der Gleichung (9) die beiden Darstellungen $C(A)$ und $D(A)$ gleich und irreduzibel angenommen werden, erhalten wir

$$D(A)\,V = VD(A)$$

[10]) Vgl. I. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen. Transactions Amer. Math. Soc. **10** (1909), S. 159—175, Satz I.

[11]) Charakteristik einer Darstellung heißt die Spur der „allgemeinen" Matrix $D(A)$ dieser Darstellung.

und infolgedessen [12])

$$V = cE$$

mit einer von U abhängenden Größe c. Ist $D(A)$ vom Grade g, so findet man c durch [13])

$$\sigma(V) = cg \quad \text{oder} \quad c = \frac{1}{g}\sigma(V).$$

Nun ist

$$V = \int F(Z)|Z\bar{Z}|^m dz = \int D(Z^{-1})UD(Z)|Z\bar{Z}|^m dZ$$

und daher

$$\sigma(V) = \int \sigma(D(Z^{-1})UD(Z))|Z\bar{Z}|^m dZ$$
$$= \int \sigma(U)|Z\bar{Z}|^m dZ = \sigma(U)h.$$

Mithin erhalten wir

$$c = \frac{1}{g}\sigma(V) = \frac{1}{g}h\sigma(U)$$

und weiter aus

$$cE = V = \int F(Z)|Z\bar{Z}|^m dZ$$

die Gleichung [14])

$$c\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} \int d_{\alpha\gamma}(Z^{-1})u_{\gamma\delta}d_{\delta\beta}(Z)|Z\bar{Z}|^m dZ$$

oder

$$\frac{h}{g}\varepsilon_{\alpha\beta}\sum_{\gamma} u_{\gamma\gamma} = \sum_{\gamma,\delta}\int d_{\alpha\gamma}(Z^{-1})u_{\gamma\delta}d_{\delta\beta}(Z)|Z\bar{Z}|^m dZ.$$

Da diese Gleichung in den Elementen $u_{\gamma\delta}$ der Matrix U identisch erfüllt ist, folgt die Relation

$$\int d_{\alpha\gamma}(Z^{-1})d_{\delta\beta}(Z)|Z\bar{Z}|^m dZ = \frac{h}{g}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} \tag{12}$$

für jedes System von Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und weiter für beliebige Matrizen A_1, A_2 durch einfache Rechnung

$$\int d_{\alpha\gamma}(A_1 Z^{-1})d_{\delta\beta}(Z A_2)|Z\bar{Z}|^m dZ = \frac{h}{g}d_{\alpha\beta}(A_1 A_2)\varepsilon_{\gamma\delta}. \tag{13}$$

Insbesondere entnehmen wir hieraus den

Satz 2. *Für die Charakteristik $\varphi(A)$ einer irreduziblen Darstellung $D(A)$ der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ besteht mit beliebigen Matrizen A_1, A_2 dieser Gruppe die Relation:*

$$\int \varphi(A_1 Z^{-1})\varphi(Z A_2)|Z\bar{Z}|^m dZ = \frac{h}{g}\varphi(A_1 A_2). \tag{14}$$

---

[12]) Vgl. die in 10) angegebene Arbeit von I. Schur, Satz III.

[13]) Die Spur einer Matrix M wird mit $\sigma(M)$ bezeichnet.

[14]) Die Größen $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sind die Elemente der Einheitsmatrix $E = (\varepsilon_{\alpha\beta})$.

II.

Bezeichnet $\psi(Z)$ eine homogene ganzrationale Funktion der Dimension m in den Elementen $z_{\varkappa\lambda}$ der Matrix Z, ferner $f(\mathfrak{X})$ eine Form der Veränderlichenmatrix $\mathfrak{X}$, so ist das Integral [15])

$$g(\mathfrak{X}) = \int \psi(Z^{-1}) f(Z\mathfrak{X}) |Z\bar{Z}|^m dZ \tag{15}$$

gleichfalls eine Form der Matrix $\mathfrak{X}$; sie gehört dem Modul $\mathsf{M}(f(\mathfrak{X}))$ an, da die Integralform $g(\mathfrak{X})$ durch eine Folge von Formen der Gestalt

$$g_k(\mathfrak{X}) = \sum_{\varkappa} a_{k\varkappa} \psi(A_\varkappa^{-1}) f(A_\varkappa \mathfrak{X}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

beliebig genau approximiert werden kann. Ist daher $f(\mathfrak{X})$ Element eines Formenmoduls M, so gehört auch jede Integralform $g(\mathfrak{X})$ der Gestalt (15) diesem Modul an.

Ist insbesondere $\varphi(A)$ die Charakteristik einer irreduziblen Darstellung $D(A)$ [16]) des Grades g der Gruppe $\mathfrak{G}_n$, so können wir die Integralform

$$\varphi[f(\mathfrak{X})] = \frac{g}{h} \int \varphi(Z^{-1}) f(Z\mathfrak{X}) |Z\bar{Z}|^m dZ \tag{16}$$

bilden, die gleichfalls dem Modul $\mathsf{M}(f(\mathfrak{X}))$ angehört; wir nennen diese Form die φ-Transformierte der Form $f(\mathfrak{X})$. Für diese Transformierten gilt der

Satz 3. *Ist $\varphi(A)$ eine einfache Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{G}_n$, so bilden die φ-Transformierten der Formen eines Moduls M einen Teilmodul M^* des Moduls M.*

Der Beweis läßt sich aus den nachstehenden Regeln entnehmen, deren Richtigkeit leicht zu überprüfen ist:

1. Es ist $\varphi[\alpha_1 f_1(\mathfrak{X}) + \alpha_2 f_2(\mathfrak{X})] = \alpha_1 \varphi[f_1(\mathfrak{X})] + \alpha_2 \varphi[f_2(\mathfrak{X})]$.
2. Ist $\varphi[f(\mathfrak{X})] = g(\mathfrak{X})$, so ist auch $\varphi[f(A\mathfrak{X})] = g(A\mathfrak{X})$.
3. Ist $f(\mathfrak{X}) = \lim f_k(\mathfrak{X})$, so ist $\varphi[f(\mathfrak{X})] = \lim \varphi[f_k(\mathfrak{X})]$.

Von größter Bedeutung für die weiteren Untersuchungen sind die im folgenden Satze angegebenen Grundrelationen:

Satz 4. *Sind $\varphi(A)$, $\varphi_1(A)$ zwei verschiedene einfache Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{G}_n$, so gelten für jede Form $f(\mathfrak{X})$ der Veränderlichenmatrix $\mathfrak{X}$ die Beziehungen:*

$$\varphi[\varphi[f(\mathfrak{X})]] = \varphi[f(\mathfrak{X})], \tag{17}$$

$$\varphi_1[\varphi[f(\mathfrak{X})]] = 0. \tag{18}$$

Zum Beweise bilden wir

$$g(\mathfrak{X}) = \frac{g}{h} \int \varphi(Z^{-1}) f(Z\mathfrak{X}) |Z\bar{Z}|^m dZ,$$

---

[15]) Das Integral hat einen Sinn, da $\psi(Z^{-1}) |Z\bar{Z}|^m$ eine ganzrationale Funktion der $z_{\varkappa\lambda}$ ist.

[16]) Ich nenne die Charakteristik einer irreduziblen Darstellung auch einfach.

woraus wir für jede Matrix A aus $\mathfrak{G}_n$ die Gleichung

$$g(A\mathfrak{X}) = \frac{g}{h}\int \varphi(AA^{-1}Z^{-1})f(ZA\mathfrak{X})|Z\overline{Z}|^m dZ$$

entnehmen können. Ist A eine unitäre Matrix, so folgt hieraus nach (5)

$$g(A\mathfrak{X}) = \frac{g}{h}\int \varphi(AZ^{-1})f(Z\mathfrak{X})|Z\overline{Z}|^m dZ. \tag{19}$$

Da die Koeffizienten der auf den beiden Seiten dieser Gleichung stehenden Formen der Matrix $\mathfrak{X}$ homogene ganzrationale Funktionen der Elemente $a_{\varkappa\lambda}$ der Matrix A darstellen, gilt diese Gleichung für alle Matrizen A der Gruppe $\mathfrak{G}_n$. Nun folgt weiter für eine zweite einfache Charakteristik $\varphi_1(A)$ des Grades g_1 der Gruppe $\mathfrak{G}_n$

$$\varphi_1[g(\mathfrak{X})] = \frac{g_1}{h}\int \varphi_1(Y^{-1})g(Y\mathfrak{X})|Y\overline{Y}|^m dY$$

und nach (19)

$$\varphi_1[g(\mathfrak{X})] = \frac{gg_1}{h^2}\int\int \varphi_1(Y^{-1})\varphi(YZ^{-1})f(Z\mathfrak{X})|Y\overline{Y}^m||Z\overline{Z}|^m dZ\,dY.$$

Da die beiden Integrationen miteinander vertauscht werden dürfen, entsteht hieraus die Gleichung

$$\varphi_1[g(\mathfrak{X})] = \frac{gg_1}{h^2}\int\left(\int \varphi_1(Y^{-1})\varphi(YZ^{-1})|Y\overline{Y}|^m dY\right)f(Z\mathfrak{X})|Z\overline{Z}|^m dZ,$$

wobei nach (11) das innere Integral den Wert

$$\int \varphi_1(Y^{-1})\varphi(YZ^{-1})|Y\overline{Y}|^m dY = 0$$

annimmt, wenn $\varphi_1(A)$ von $\varphi(A)$ verschieden ist, dagegen bei Gleichheit der Charakteristiken nach (14) den Wert

$$\int \varphi(Y^{-1})\varphi(YZ^{-1})|Y\overline{Y}|^m dY = \frac{h}{g}\varphi(Z^{-1}).$$

Im ersten Falle erhält man demnach

$$\varphi_1[g(\mathfrak{X})] = 0,$$

während im zweiten Falle

$$\varphi[g(\mathfrak{X})] = \frac{g^2}{h^2}\int \frac{h}{g}\varphi(Z^{-1})f(Z\mathfrak{X})|Z\overline{Z}|^m dZ = g(\mathfrak{X})$$

folgt. Damit sind die Behauptungen des Satzes vollständig bewiesen.

Eine Form $f(\mathfrak{X})$ der Veränderlichenmatrix $\mathfrak{X}$ nennen wir weiterhin *φ-invariant*, wenn sie die Gleichung

$$\varphi[f(\mathfrak{X})] = f(\mathfrak{X}) \tag{20}$$

erfüllt. Wie die Gleichung (17) zeigt, ist die φ-Transformierte einer beliebigen Form $f(\mathfrak{X})$ stets φ-invariant. Die Bedeutung dieses Begriffes der φ-invarianten Form geht aus dem folgenden Satze hervor:

Satz 5. *Ist $D(A)$ eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ mit der Charakteristik $\varphi(A)$, so erzeugt ein Formenmodul M dann und nur dann ein Vielfaches der Darstellung $D(A)$ von $\mathfrak{G}_n$, wenn jede Form des Moduls φ-invariant ist.*

Erzeugt der Formenmodul M eine Darstellung mit der Charakteristik $\psi(A) = r\varphi(A)$, so kann M als direkte Summe

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2 + \cdots + \mathsf{M}_r$$

von r isomorphen Teilmoduln dargestellt werden, von denen jeder die irreduzible Darstellung $D(A)$ erzeugt. Da daher jede Form $g(\mathfrak{X})$ aus M sich in der Gestalt

$$g(\mathfrak{X}) = g_1(\mathfrak{X}) + g_2(\mathfrak{X}) + \cdots + g_r(\mathfrak{X})$$

aus Formen der Teilmoduln zusammensetzt, und die Gleichung

$$\varphi[g(\mathfrak{X})] = \varphi[g_1(\mathfrak{X})] + \varphi[g_2(\mathfrak{X})] + \cdots + \varphi[g_r(\mathfrak{X})]$$

besteht, können wir uns darauf beschränken, die Gleichungen

$$\varphi[g_\varrho(\mathfrak{X})] = g_\varrho(\mathfrak{X}) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

für die einzelnen Summanden von $g(\mathfrak{X})$ nachzuweisen. Es genügt demnach zu zeigen, daß die Formen eines Moduls M, der die irreduzible Darstellung $D(A)$ des Grades g mit der Charakteristik $\varphi(A)$ erzeugt, φ-invariant sind. Ist

$$f_1(\mathfrak{X}),\ f_2(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ f_g(\mathfrak{X})$$

eine linear unabhängige Basis dieses Moduls, so gelten die linearen Beziehungen

$$f_\alpha(\mathrm{Z}\mathfrak{X}) = \sum_\beta d_{\alpha\beta}(\mathrm{Z}) f_\beta(\mathfrak{X}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, g),$$

wenn

$$D(\mathrm{Z}) = (d_{\alpha\beta}(\mathrm{Z}))$$

gesetzt ist. Hieraus folgt weiter

$$d_{\gamma\gamma}(\mathrm{Z}^{-1}) f_\alpha(\mathrm{Z}\mathfrak{X}) = \sum_\beta d_{\gamma\gamma}(\mathrm{Z}^{-1})\, d_{\alpha\beta}(\mathrm{Z}) f_\beta(\mathfrak{X})$$

und

$$\int d_{\gamma\gamma}(\mathrm{Z}^{-1}) f_\alpha(\mathrm{Z}\mathfrak{X}) |\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}|^m d\mathrm{Z} = \sum_\beta \int d_{\gamma\gamma}(\mathrm{Z}^{-1})\, d_{\alpha\beta}(\mathrm{Z}) f_\beta(\mathfrak{X}) |\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}|^m d\mathrm{Z},$$

also auf Grund der Gleichung (12)

$$\int d_{\gamma\gamma}(\mathrm{Z}^{-1}) f_\alpha(\mathrm{Z}\mathfrak{X}) |\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}|^m d\mathrm{Z} = \sum_\beta \frac{h}{g} \varepsilon_{\alpha\gamma}\, \varepsilon_{\gamma\beta} f_\beta(\mathfrak{X}).$$

Summiert man noch über γ, so entsteht die Beziehung

$$\int \varphi(\mathrm{Z}^{-1}) f_\alpha(\mathrm{Z}\mathfrak{X}) |\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}|^m d\mathrm{Z} = \frac{h}{g} f_\alpha(\mathfrak{X}).$$

Somit gilt für jede Form $f_a(\mathfrak{X})$ der Basis von M die Gleichung:

$$\varphi[f_a(\mathfrak{X})] = f_a(\mathfrak{X}).$$

Daher ist auch jede Form des Moduls M φ-invariant.

Besteht andererseits ein Formenmodul M aus lauter φ-invarianten Formen, so kann die von ihm erzeugte Darstellung keine anderen irreduziblen Bestandteile als solche mit der Charakteristik $\varphi(A)$ enthalten. Denn besäße sie einen irreduziblen Bestandteil $D_1(A)$ mit der Charakteristik $\varphi_1(A)$, so könnte M als direkte Summe

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2$$

zweier echter Teilmoduln M_1, M_2 dargestellt werden, von denen der erste die Darstellung $D_1(A)$ erzeugt. Jede Form $f_1(\mathfrak{X})$ des Moduls M_1 müßte dann nach dem Vorangehenden die Beziehung

$$\varphi_1[f_1(\mathfrak{X})] = f_1(\mathfrak{X})$$

erfüllen, während für $f_1(\mathfrak{X})$ als Form des Moduls M auch die Gleichung

$$\varphi[f_1(\mathfrak{X})] = f_1(\mathfrak{X})$$

besteht. Hieraus erhielte man aber wegen (18)

$$0 = \varphi_1[\varphi[f_1(\mathfrak{X})]] = \varphi_1[f_1(\mathfrak{X})] = f_1(\mathfrak{X})$$

im Widerspruch zur Annahme, daß M_1 ein echter Teilmodul von M sein sollte.

Aus dem Satz 5 ergibt sich sogleich die nachstehende Folgerung:

Satz 6. *Die durch den Formenmodul M erzeugte Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ enthält dann und nur dann einen irreduziblen Bestandteil mit der Charakteristik $\varphi(A)$, wenn der Modul M φ-invariante Formen enthält.*

Ebenso einfach erhält man den

Satz 7. *Sind*

$$\varphi_1(A),\ \varphi_2(A),\ \ldots,\ \varphi_l(A)$$

die verschiedenen einfachen Charakteristiken[17]) *der Gruppe $\mathfrak{G}_n$, so läßt sich jeder Formenmodul M als direkte Summe*

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2 + \cdots + \mathsf{M}_l$$

von Teilmoduln darstellen, von denen (für $\lambda = 1, 2, \ldots, l$) der Modul M_λ genau die φ_λ-invarianten Formen von M enthält. Diese Aussage ist selbstverständlich so zu verstehen, daß der Teilmodul M_λ der Nullmodul ist, wenn der Modul M keine φ_λ-invarianten Formen enthält, wenn also in der von M erzeugten Darstellung von $\mathfrak{G}_n$ ein irreduzibler Bestandteil mit der Charakteristik $\varphi_\lambda(A)$ nicht vorkommt.

---

[17]) Die Anzahl der einfachen Charakteristiken der Dimension m ist endlich; vgl. Schur, Satz III.

Jede Form $f(\mathfrak{X})$ der Matrix $\mathfrak{X}$ läßt sich demnach eindeutig als Summe

$$f(\mathfrak{X}) = f_1(\mathfrak{X}) + f_2(\mathfrak{X}) + \cdots + f_l(\mathfrak{X})$$

von Formen $f_\lambda(\mathfrak{X})$ darstellen, für die die Beziehungen

$$\varphi_\lambda[f_\lambda(\mathfrak{X})] = f_\lambda(\mathfrak{X})$$

bestehen. Darüber hinaus gilt, wie ich in diesem Zusammenhang zeigen will, der

Satz 8. *Zu jeder Form $f(\mathfrak{X})$ des Moduls Γ läßt sich eine Form $g(\mathfrak{X})$ angeben, so daß die Gleichung*

$$f(\mathfrak{X}) = \sum_\lambda \varphi_\lambda\left[\frac{f_\lambda}{g_\lambda} g(\mathfrak{X})\right] \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

besteht. Dabei sind die natürlichen Zahlen f_λ durch die Gleichung

$$(\sigma(A))^m = \sum_\lambda f_\lambda \varphi_\lambda(A),$$

die Form $g(\mathfrak{X})$ durch die Gleichung

$$f(\mathfrak{X}) = \frac{1}{h} \int (\sigma(Z^{-1}))^m g(Z\mathfrak{X}) |Z\bar{Z}|^m dZ$$

eindeutig bestimmt; ferner bezeichnet g_λ den Grad der Charakteristik $\varphi_\lambda(A)$.

Besteht für eine Form $f(\mathfrak{X})$ die Gleichung

$$\int (\sigma(Z^{-1}))^m f(Z\mathfrak{X}) |Z\bar{Z}|^m dZ = 0,$$

so gilt

$$\sum_\lambda \int f_\lambda \varphi_\lambda(Z^{-1}) f(Z\mathfrak{X}) |Z\bar{Z}|^m dZ = 0$$

oder

$$\sum_\lambda \frac{f_\lambda}{g_\lambda} h \varphi_\lambda[f(\mathfrak{X})] = 0.$$

Dann ist auch

$$\varphi_\varkappa\left[\sum_\lambda \frac{f_\lambda}{g_\lambda} h \varphi_\lambda [f(\mathfrak{X})]\right] = \frac{f_\varkappa}{g_\varkappa} h \varphi_\varkappa [f(\mathfrak{X})] = 0$$

oder

$$\varphi_\varkappa [f(\mathfrak{X})] = 0. \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, l)$$

Daher ist nach Satz 7 der Modul $\mathsf{M}(f(\mathfrak{X}))$ der Nullmodul, also $f(\mathfrak{X}) = 0$.

Ist demnach

$$g_1(\mathfrak{X}),\ g_2(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ g_N(\mathfrak{X})$$

eine linear unabhängige Basis des Gesamtmoduls Γ, so sind auch die Formen

$$f_\alpha(\mathfrak{X}) = \frac{1}{h} \int (\sigma(Z^{-1}))^m g_\alpha(Z\mathfrak{X}) |Z\bar{Z}|^m dZ \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N)$$

linear unabhängig, weshalb sie gleichfalls eine Basis des Moduls Γ bilden. Daher gibt es zu jeder Form $f(\mathfrak{X})$ aus Γ eine eindeutig be-

stimmte Form $g(\mathfrak{X})$, so daß

$$f(\mathfrak{X}) = \frac{1}{h}\int (\sigma(Z^{-1}))^m g(Z\mathfrak{X})|Z\bar{Z}|^m dZ$$

gilt. Hieraus erhält man schließlich in einfacher Rechnung

$$f(\mathfrak{X}) = \sum_\lambda \frac{f_\lambda}{g_\lambda} \varphi_\lambda[g(\mathfrak{X})],$$

womit der Satz 8 vollständig bewiesen ist.

Der Teilmodul der φ-invarianten Formen eines Moduls M wird gekennzeichnet durch den

Satz 9. *Ist $\varphi(A)$ eine einfache Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{G}_n$, die Formenreihe*

$$f_1(\mathfrak{X}),\ f_2(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ f_r(\mathfrak{X})$$

eine Basis[18]) *eines Formenmoduls M, so ist die Reihe der φ-Transformierten*

$$\varphi[f_1(\mathfrak{X})],\ \varphi[f_2(\mathfrak{X})],\ \ldots,\ \varphi[f_r(\mathfrak{X})]$$

eine Basis des Teilmoduls M^* aller φ-invarianten Formen des Moduls M.

Auf Grund der Gleichung (17) sind nämlich die Formen $\varphi[f_\varrho(\mathfrak{X})]$ sämtlich φ-invariant; ist $f(\mathfrak{X})$ eine beliebige φ-invariante Form des Moduls M, so gilt zunächst

$$f(\mathfrak{X}) = \sum_\varrho a_\varrho f_\varrho(\mathfrak{X}) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

mit komplexen Koeffizienten a_ϱ und daher

$$f(\mathfrak{X}) = \varphi[f(\mathfrak{X})] = \sum_\varrho a_\varrho \varphi[f_\varrho(\mathfrak{X})],$$

womit alles bewiesen ist.

Ebenso leicht ergibt sich der

Satz 10. *Es sei $\varphi(A)$ eine einfache Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{G}_n$. Ist der Formenmodul M bestimmt durch die Formenreihe*

$$g_1(\mathfrak{X}),\ g_2(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ g_k(\mathfrak{X}),$$

so ist der Teilmodul M^* der φ-invarianten Formen aus M bestimmt durch die Formenreihe

$$\varphi[g_1(\mathfrak{X})],\ \varphi[g_2(\mathfrak{X})],\ \ldots,\ \varphi[g_k(\mathfrak{X})].$$

Der durch die Formen

$$g_1(\mathfrak{X}),\ g_2(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ g_k(\mathfrak{X})$$

bestimmte Modul M besteht aus allen endlichen oder unendlichen (konvergenten) Summen der Gestalt

$$f(\mathfrak{X}) = \sum_\varkappa a_\varkappa g_{\gamma\varkappa}(A_\varkappa \mathfrak{X})$$

[18]) Von einer Basis wird, wenn nicht ausdrücklich hinzugesetzt, keine lineare Unabhängigkeit gefordert.

mit komplexen Koeffizienten $a_\varkappa$, Matrizen $A_\varkappa$ aus $\mathfrak{G}_n$ und beliebig aus der Reihe 1, 2, ..., k gewählten Indizes $\gamma_\varkappa$. Ist insbesondere $f(\mathfrak{X})$ eine φ-invariante Form, so erhalten wir

$$f(\mathfrak{X}) = \varphi[f(\mathfrak{X})] = \sum_\varkappa a_\varkappa \varphi[g_{\gamma_\varkappa}(A_\varkappa \mathfrak{X})],$$

weshalb $f(\mathfrak{X})$ dem durch die (gleichfalls φ-invarianten) Formen

$$\varphi[g_1(\mathfrak{X})],\ \varphi[g_2(\mathfrak{X})],\ \ldots,\ \varphi[g_k(\mathfrak{X})]$$

bestimmten Teilmodul M^* von M angehört.

III.

Das im Satze 6 ausgesprochene Kriterium für die Frage, ob die durch einen Formenmodul M erzeugte Darstellung einen bestimmten irreduziblen Bestandteil enthält oder nicht, ist, auch in Verbindung mit den Sätzen 9 und 10, für die praktische Rechnung zu unhandlich; daher erscheint es wünschenswert, den dort eingeführten Integraloperator φ durch einen finiten Operator, d. h. die Integration über einen Formenbereich durch die Summation über eine endliche Anzahl von Formen zu ersetzen. Es ist dies in der Tat möglich durch Ausnützung des bekannten [19]) engen Zusammenhanges zwischen den Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe und der symmetrischen Gruppe.

Jeder irreduziblen homogenen ganzrationalen Darstellung $D(A)$ von der Dimension m der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{G}_n$ ist eine Zerlegung

$$m = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n \qquad (\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_n \geqq 0) \tag{21}$$

der Zahl m in nichtnegative ganze Zahlen zugeordnet; die Anzahl der wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen dieser Art ist genau gleich der Anzahl dieser Zerlegungen (21) der Dimensionszahl. Andererseits entspricht auch jeder solchen Zerlegung von m eine wohlbestimmte irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_m$ in m Ziffern [20]). Den verschiedenen einfachen Charakteristiken

$$\varphi_1(A),\ \varphi_2(A),\ \ldots,\ \varphi_l(A) \tag{22}$$

von $\mathfrak{G}_n$ entsprechen daher verschiedene einfache Charaktere der Gruppe $\mathfrak{S}_m$, die in der gleichen Reihenfolge mit

$$\chi_1(P),\ \chi_2(P),\ \ldots,\ \chi_l(P) \tag{23}$$

bezeichnet werden mögen. Ist dann $f(\mathfrak{X})$ eine Form der Matrix $\mathfrak{X}$,

[19]) Vgl. hierzu Schur, wo auch alle weiterhin benötigten Ergebnisse dieser Theorie zu finden sind.

[20]) Im Falle $m > n$ werden bei dieser Zuordnung nicht alle einfachen Charaktere der $\mathfrak{S}_m$ herangezogen, sondern nur diejenigen, die Zerlegungen von m in höchstens n positive ganzzahlige Summanden entsprechen.

$\chi(P)$ ein einfacher Charakter vom Grade f der Gruppe $\mathfrak{S}_m$, so bezeichne $\chi[f(\mathfrak{X})]$ die *χ-Transformierte* von $f(\mathfrak{X})$, d. h. die Form

$$\chi[f(\mathfrak{X})] = \frac{f}{m!}\sum_P \chi(P) f(\mathfrak{X} P^{-1}), \tag{24}$$

worin die Summe über alle Permutationen P der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ zu erstrecken ist. Für diese, aus den Charakteren der Gruppe gewonnenen Operatoren gelten ähnliche Beziehungen wie die in (17) und (18) für die Integraloperatoren φ angegebenen Gleichungen: Es ist für jeden einfachen Charakter $\chi(P)$

$$\chi[\chi[f(\mathfrak{X})]] = \chi[f(\mathfrak{X})] \tag{25}$$

und für jedes Paar verschiedener einfacher Charaktere $\chi(P)$, $\chi'(P)$

$$\chi'[\chi[f(\mathfrak{X})]] = 0. \tag{26}$$

Weiter nennen wir eine Form $f(\mathfrak{X})$ *χ-symmetrisch*, wenn sie die Beziehung

$$\chi[f(\mathfrak{X})] = f(\mathfrak{X})$$

erfüllt; insbesondere ist also für jede Form $f(\mathfrak{X})$ die χ-Transformierte $\chi[f(\mathfrak{X})]$ eine χ-symmetrische Form[21]).

Der Zusammenhang mit den bisherigen Untersuchungen geht aus dem nachfolgenden Satze hervor:

Satz 11. *Es sei $\varphi(A)$ eine einfache Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ und $\chi(P)$ der zugeordnete einfache Charakter der Gruppe $\mathfrak{S}_m$. Eine Form $f(\mathfrak{X})$ der Matrix $\mathfrak{X}$ ist dann und nur dann φ-invariant, wenn sie χ-symmetrisch ist.*

Zum Beweise stellen wir eine linear unabhängige Basis

$$f_1(\mathfrak{X}), f_2(\mathfrak{X}), \ldots, f_N(\mathfrak{X})$$

des Gesamtmoduls Γ auf; es sind dann für jedes Paar von Matrizen A aus $\mathfrak{G}_n$ und P aus $\mathfrak{S}_m$ die Formen $f_\alpha(A\mathfrak{X}P^{-1})$ wiederum in Γ enthalten, weshalb lineare Beziehungen der Gestalt

$$f_\alpha(A\mathfrak{X}P^{-1}) = \sum_\beta m_{\alpha\beta}(A;P) f_\beta(\mathfrak{X}) \quad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N)$$

bestehen. Für ein weiteres Paar von Matrizen B aus $\mathfrak{G}_n$ und Q aus $\mathfrak{S}_m$ ergeben sich hieraus die Entwicklungen

$$f_\alpha(AB\mathfrak{X}Q^{-1}P^{-1}) = \sum_\beta m_{\alpha\beta}(A;P) f_\beta(B\mathfrak{X}Q^{-1}) = \sum_{\beta,\gamma} m_{\alpha\beta}(A;P) m_{\beta\gamma}(B;Q) f_\gamma(\mathfrak{X})$$

und

$$f_\alpha(AB\mathfrak{X}Q^{-1}P^{-1}) = \sum_\gamma m_{\alpha\gamma}(AB;PQ) f_\gamma(\mathfrak{X}),$$

[21]) Die Beziehungen (25) und (26) lassen sich in ganz der gleichen Weise beweisen, wie die Formeln (3) meiner Arbeit: Darstellungstheorie der alternierenden Gruppe. Math. Zeitschr. **43** (1938), S. 553–572.

weshalb die Gleichungen

$$\sum_{\beta} m_{\alpha\beta}(A;P)\, m_{\beta\gamma}(B;Q) = m_{\alpha\gamma}(AB;PQ)$$

bestehen, die unter der Festsetzung

$$M(A;P) = (m_{\alpha\beta}(A;P))$$

zu der Matrixgleichung

$$M(A;P)\, M(B;Q) = M(AB;PQ)$$

zusammengefaßt werden können. Daher bilden die Matrizen $M(A;E)$ eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_n$, die Matrizen $M(E;P)$ eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{S}_m$, die miteinander die Vertauschbarkeitsbeziehung

$$M(A;P) = M(A;E)\, M(E;P) = M(E;P)\, M(A;E)$$

erfüllen. Offenbar ist die Darstellung $M(A;E)$ zu der bekannten[22]) Darstellung

$$\Pi_m A = A \times A \times \ldots \times A$$

in m direkten Faktoren A ähnlich, wie man leicht erkennt, wenn man als Basis des Moduls Γ die lexikographisch geordneten Potenzprodukte

$$x_{\alpha_1 1}\, x_{\alpha_2 2} \ldots x_{\alpha_m m} \quad (1 \leqq \alpha_\mu \leqq n;\ \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

wählt. In diesem Falle wird[23]) die Matrix $M(A;P)$ zu

$$M(A;P) = \Pi_P A.$$

Daher läßt sich durch eine geeignete konstante Matrix L eine vollständige Zerfällung[24])

$$(27) \quad L\, M(A;P)\, L^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(A) \times S_1(P) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D_2(A) \times S_2(P) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & D_l(A) \times S_l(P) \end{pmatrix}$$

erreichen; besitzen die irreduziblen Darstellungen

$$D_1(A),\ D_2(A),\ \ldots,\ D_l(A)$$

der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ bei passender Zählung die Charakteristiken

$$\varphi_1(A),\ \varphi_2(A),\ \ldots,\ \varphi_l(A),$$

so besitzen die gleichfalls irreduziblen Darstellungen

$$S_1(P),\ S_2(P),\ \ldots,\ S_l(P)$$

---

[22]) Vgl. Schur, § 1.
[23]) Vgl. Schur, § 1, Formel (9).
[24]) Vgl. Schur, § 2.

der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ die Charaktere

$$\chi_1(P),\ \chi_2(P),\ \ldots,\chi_l(P)$$

in der bereits oben festgelegten Zählung.

Durch die Zerfällung (27) wird eine neue Basis des Moduls Γ und damit eine Darstellung dieses Moduls als direkte Summe

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_l$$

festgelegt. Eine geeignet gewählte linear unabhängige Basis

$$f_1^{(\lambda)}(\mathfrak{X}),\ f_2^{(\lambda)}(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ f_r^{(\lambda)}(\mathfrak{X}) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

des Moduls Γ_λ liefert dabei lineare Beziehungen der Gestalt

$$f_\varrho^{(\lambda)}(A\,\mathfrak{X}\,P^{-1}) = \sum_\sigma m_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}(A;P)\,f_\sigma(\mathfrak{X}) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2\ldots, r),$$

aus denen durch die Festsetzung

$$M^{(\lambda)}(A;P) = (m_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}(A;P))$$

die Gleichung

$$M^{(\lambda)}(A;P) = D_\lambda(A) \times S_\lambda(P)$$

hervorgeht. Ist daher g_λ der Grad von $D_\lambda(A)$ und f_λ der Grad von $S_\lambda(P)$, so ist

$$M^{(\lambda)}(A;E) = D_\lambda(A) \times E_{f_\lambda} \tag{28}$$

$$M^{(\lambda)}(E;P) = E_{g_\lambda} \times S_\lambda(P). \tag{29}$$

Daher sind nach Satz 5 sämtliche Formen des Moduls Γ_λ φ_λ-invariant; es ist sogar Γ_λ der Modul aller φ_λ-invarianten Formen des Gesamtmoduls Γ. Ebenso aber sind wegen (29) nach einem früher von mir erhaltenen Ergebnis[25]) sämtliche Formen des Moduls Γ_λ χ_λ-symmetrisch; es ist sogar Γ_λ der Modul aller χ_λ-symmetrischen Formen des Gesamtmoduls Γ. Dies aber ist die Behauptung des Satzes.

Somit erhalten wir die neuen Fassungen der früheren Sätze:

Satz 5*. *Ist $D(A)$ eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ mit der Charakteristik $\varphi(A)$, ist weiter $\chi(P)$ der dieser Darstellung zugeordnete einfache Charakter der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_m$, so erzeugt ein Formenmodul M dann und nur dann ein Vielfaches der Darstellung $D(A)$ von $\mathfrak{G}_n$, wenn jede Form des Moduls χ-symmetrisch ist.*

Satz 6*. *Die durch den Formenmodul M erzeugte Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ enthält dann und nur dann einen irreduziblen Bestandteil mit der Charakteristik $\varphi(A)$ und dem zugeordneten einfachen Charakter $\chi(P)$ der $\mathfrak{S}_m$, wenn der Modul M χ-symmetrische Formen enthält.*

---

[25]) Vgl. meine in [21]) angegebene Arbeit, Abschnitt I.

Für die Neufassung der Sätze 9 und 10 muß man beachten, daß ein Modul, der eine Form $f(\mathfrak{X})$ enthält, im allgemeinen nicht ihre χ-Transformierte

$$\chi[f(\mathfrak{X})] = \frac{f}{m!} \sum_P \chi(P) f(\mathfrak{X} P^{-1})$$

enthält, was man leicht durch Beispiele belegen kann. Daher können lediglich die nachstehenden Aussagen gemacht werden:

Satz 9*. *Ist $\varphi(A)$ eine einfache Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{G}_n$, $\chi(P)$ der ihr zugeordnete einfache Charakter der Gruppe $\mathfrak{S}_m$, ferner die Formenreihe*

$$f_1(\mathfrak{X}),\ f_2(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ f_r(\mathfrak{X})$$

eine Basis eines Formenmoduls M, *so ist der Teilmodul* M* *aller φ-invarianten Formen des Moduls* M *ein Teilmodul des durch die χ-Transformierten*

$$\chi[f_1(\mathfrak{X})],\ \chi[f_2(\mathfrak{X})],\ \ldots,\ \chi[f_r(\mathfrak{X})]$$

aufgespannten Formenmoduls.

Eine φ-invariante Form

$$f(\mathfrak{X}) = \sum_\varrho a_\varrho f_\varrho(\mathfrak{X}) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

erfüllt nämlich die Beziehungen

$$f(\mathfrak{X}) = \varphi[f(\mathfrak{X})] = \chi[f(\mathfrak{X})] = \sum_\varrho a_\varrho \chi[f_\varrho(\mathfrak{X})].$$

Daß die Formen $\chi[f_\varrho(\mathfrak{X})]$ eine Basis eines Formenmoduls bilden, ist leicht nachzuweisen.

Satz 10*. *Es sei $\varphi(A)$ eine einfache Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{G}_n$, $\chi(P)$ der ihr zugeordnete einfache Charakter der Gruppe $\mathfrak{S}_m$. Ist der Formenmodul* M *bestimmt durch die Formenreihe*

$$g_1(\mathfrak{X}),\ g_2(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ g_k(\mathfrak{X}),$$

so ist der Modul M* *der φ-invarianten Formen des Moduls* M *als Teilmodul in dem durch die χ-Transformierten*

$$\chi[g_1(\mathfrak{X})],\ \chi[g_2(\mathfrak{X})],\ \ldots,\ \chi[g_k(\mathfrak{X})]$$

bestimmten Formenmodul enthalten.

Der Beweis läßt sich leicht dem des Satzes 10 nachbilden, so daß nicht näher darauf eingegangen zu werden braucht.

IV.

Für eine sehr allgemeine Klasse von Formenmoduln der Veränderlichenmatrix $\mathfrak{X}$ läßt sich auf einem besonders einfachen Wege die Darstellung $D(A)$ der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ bestimmen, die durch einen Modul M dieser Klasse erzeugt wird. Es läßt sich nämlich hier die Charakteristik der Darstellung $D(A)$ unmittelbar angeben; daher kann in

diesem Falle durch eine verhältnismäßig einfache Rechnung genau angegeben werden, in welcher Vielfachheit eine irreduzible Darstellung in der Darstellung $D(A)$ vorkommt.

Ist

$$f_1(\mathfrak{X}),\ f_2(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ f_N(\mathfrak{X}) \qquad N = n^m$$

eine linear unabhängige Basis des Gesamtmoduls Γ, so gelten, wie schon im vorigen Abschnitt bemerkt wurde, für jede Matrix A aus $\mathfrak{G}_n$ und jede Permutation P aus $\mathfrak{S}_m$ lineare Beziehungen der Gestalt

$$f_\alpha(A\,\mathfrak{X}\,P^{-1}) = \sum_\beta m_{\alpha\beta}(A;P) f_\beta(\mathfrak{X}) \quad (\alpha,\beta = 1, 2, \ldots, N),$$

deren Matrizen

$$M(A;P) = (m_{\alpha\beta}(A;P)) \tag{30}$$

vom Grade N der Gleichung

$$M(A;P)\,M(B;Q) = M(AB;PQ) \tag{31}$$

genügen. Wir bezeichnen weiterhin mit $\sigma(A;P)$ die Spur der Matrix $M(A;P)$, für die die Gleichung

$$\sigma(A;P) = \sigma(A^{z_1})\,\sigma(A^{z_2}) \ldots \sigma(A^{z_r}) \tag{32}$$

gilt, wenn die Permutation P in r ziffernfremde Zykeln der Ordnungen $z_1, z_2, \ldots, z_r$ zerfällt[26]). Ferner wollen wir unter einer *Funktion $a(P)$ der Gruppe $\mathfrak{S}_m$* eine Reihe von Werten $a(P)$ verstehen, die jeder Permutation P von $\mathfrak{S}_m$ eine komplexe Zahl $a(P)$ zuordnet.

Unter diesen Bezeichnungen gilt dann der folgende

Satz 12. *Ist $a(P)$ eine Funktion der Gruppe $\mathfrak{S}_m$, für die die Matrix*

$$C = \sum_P a(P)\,M(E;P)$$

der Gleichung $C^2 = C$ genügt, so erzeugt der Modul M aller Formen der Gestalt

$$g(\mathfrak{X}) = \sum_P a(P) f(\mathfrak{X}\,P^{-1})$$

mit beliebigen Formen $f(\mathfrak{X})$ des Gesamtmoduls Γ eine Darstellung $D(A)$ der Gruppe $\mathfrak{G}_n$, deren Charakteristik

$$\sigma(D(A)) = \sum_P a(P)\,\sigma(A;P)$$

ist[27]).

---

[26]) Vgl. Schur, Hilfssatz III.

[27]) Für das Bestehen der Gleichung $C^2 = C$ sind, wie sehr einfach nachzuweisen ist, die Gleichungen

$$\sum_P a(P)\,a(P^{-1}Q) = a(Q)$$

notwendig und hinreichend; es ist daher die Funktion $a(P)$ eine charakteristische Einheit der symmetrischen Gruppe. Vgl. G. Frobenius, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe. Sitzungsber. Akad. Berlin **1903**, S. 328—358.

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Formen

$$g(\mathfrak{X}) = \sum_P a(P) f(\mathfrak{X} P^{-1})$$

einen Modul M bilden, wenn $f(\mathfrak{X})$ alle Formen des Gesamtmoduls Γ durchläuft, da für $f^*(\mathfrak{X}) = f(A\mathfrak{X})$ offenbar

$$g(A\mathfrak{X}) = \sum_P a(P) f^*(\mathfrak{X} P^{-1})$$

ist. Die einer linear unabhängigen Basis $f_\alpha(\mathfrak{X})$ des Moduls entsprechenden Formen

$$g_\alpha(\mathfrak{X}) = \sum_P a(P) f_\alpha(\mathfrak{X} P^{-1}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N) \tag{33}$$

bilden offenbar eine Basis des Moduls M, da aus

$$g(\mathfrak{X}) = \sum_P a(P) f(\mathfrak{X} P^{-1})$$

und

$$f(\mathfrak{X}) = \sum_\alpha c_\alpha f_\alpha(\mathfrak{X})$$

sogleich die lineare Beziehung

$$g(\mathfrak{X}) = \sum_\alpha c_\alpha g_\alpha(\mathfrak{X})$$

folgt.

Nun gelten für jede Matrix A aus $\mathfrak{G}_n$ und jede Permutation P aus $\mathfrak{S}_m$ die linearen Beziehungen

$$f_\alpha(A\mathfrak{X}P^{-1}) = \sum_\beta m_{\alpha\beta}(A; P) f_\beta(\mathfrak{X}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N) \tag{34}$$

und daher auch

$$g_\alpha(\mathfrak{X}) = \sum_P a(P) f_\alpha(\mathfrak{X} P^{-1}) = \sum_P \sum_\beta a(P)\, m_{\alpha\beta}(E; P) f_\beta(\mathfrak{X}).$$

Setzen wir

$$c_{\alpha\beta} = \sum_P a(P)\, m_{\alpha\beta}(E; P), \tag{35}$$

so genügt die Matrix $C = (c_{\alpha\beta})$ nach Voraussetzung der Gleichung

$$C^2 = C; \tag{36}$$

ferner gilt

$$g_\alpha(\mathfrak{X}) = \sum_\beta c_{\alpha\beta} f_\beta(\mathfrak{X}) \tag{37}$$

und wegen (36)

$$\sum_\alpha c_{\gamma\alpha} g_\alpha(\mathfrak{X}) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\gamma\alpha} c_{\alpha\beta} f_\beta(\mathfrak{X}) = \sum_\beta c_{\gamma\beta} f_\beta(\mathfrak{X})$$

oder

$$\sum_\gamma c_{\alpha\gamma} g_\gamma(\mathfrak{X}) = g_\alpha(\mathfrak{X}). \tag{38}$$

Der Rang des Moduls M ist nun gleich dem Rang k der Matrix C, da aus jeder linearen Beziehung

$$\sum_\alpha x_\alpha g_\alpha(\mathfrak{X}) = 0$$

wegen (37) sogleich

$$\sum_{\alpha,\beta} x_\alpha c_{\alpha\beta} f_\beta(\mathfrak{X}) = 0,$$

also

$$\sum_{\alpha} x_\alpha c_{\alpha\beta} = 0$$

folgt. Umgekehrt gibt eine Lösung dieser Gleichungen stets

$$0 = \sum_{\alpha} x_\alpha c_{\alpha\beta} f_\beta(\mathfrak{X}) = \sum_{\alpha} x_\alpha g_\alpha(\mathfrak{X}) = 0.$$

Ist nun

$$h_1(\mathfrak{X}),\ h_2(\mathfrak{X}),\ \ldots,\ h_k(\mathfrak{X})$$

eine linear unabhängige Basis des Formenmoduls M, so gelten lineare Beziehungen der Gestalt

$$g_\alpha(\mathfrak{X}) = \sum_{\varkappa} v_{\alpha\varkappa} h_\varkappa(\mathfrak{X}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \tag{39}$$

mit einer Matrix $V = (v_{\alpha\varkappa})$ in N Zeilen und k Spalten vom Range k, ferner lineare Beziehungen

$$h_\varkappa(A\,\mathfrak{X}) = \sum_{\lambda} d_{\varkappa\lambda}(A)\, h_\lambda(\mathfrak{X}) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, k) \tag{40}$$

mit der durch den Modul M erzeugten Darstellung

$$D(A) = (d_{\varkappa\lambda}(A)) \tag{41}$$

der Gruppe $\mathfrak{G}_n$. Aus den Gleichungen

$$f_\alpha(A\,\mathfrak{X}) = \sum_{\beta} m_{\alpha\beta}(A; E)\, f_\beta(\mathfrak{X})$$

folgert man leicht die Gleichungen

$$g_\alpha(A\,\mathfrak{X}) = \sum_{\beta} m_{\alpha\beta}(A; E)\, g_\beta(\mathfrak{X}),$$

die durch (39) in die Beziehungen

$$\sum_{\varkappa} v_{\alpha\varkappa} h_\varkappa(A\,\mathfrak{X}) = \sum_{\beta,\lambda} m_{\alpha\beta}(A; E)\, v_{\beta\lambda} h_\lambda(\mathfrak{X})$$

und auf Grund von (40) in die Beziehungen

$$\sum_{\varkappa,\lambda} v_{\alpha\varkappa} d_{\varkappa\lambda}(A) h_\lambda(\mathfrak{X}) = \sum_{\beta,\lambda} m_{\alpha\beta}(A; E)\, v_{\beta\lambda} h_\lambda(\mathfrak{X})$$

über. Die lineare Unabhängigkeit der Formen $h_\lambda(\mathfrak{X})$ läßt hieraus die Gleichungen

$$\sum_{\varkappa} v_{\alpha\varkappa} d_{\varkappa\lambda}(A) = \sum_{\beta} m_{\alpha\beta}(A; E)\, v_{\beta\lambda}$$

entnehmen, die zu der Matrixgleichung

$$VD(A) = M(A; E)V \tag{42}$$

zusammengefaßt werden können. Aus den Gleichungen (38) und (39) folgt nun weiter

$$\sum_{\gamma,\varkappa} c_{\alpha\gamma} v_{\gamma\varkappa} h_\varkappa(\mathfrak{X}) = \sum_{\varkappa} v_{\alpha\varkappa} h_\varkappa(\mathfrak{X})$$

oder

$$\sum_{\gamma} c_{\alpha\gamma} v_{\gamma\varkappa} = v_{\alpha\varkappa},$$

also die Matrixgleichung

$$CV = V. \tag{43}$$

Aus der Gleichung (31) erhält man die bereits früher herangezogenen Vertauschungsbeziehungen

$$M(A;P) = M(A;E)M(E;P) = M(E;P)M(A;E)$$

und damit die Gleichung

$$M(A;E)C = \sum_{P} a(P)M(A;E)M(E;P) = CM(A;E).$$

Die daraus folgende, für jedes Paar A, B von Matrizen aus $\mathfrak{G}_n$ geltende Beziehung

$$M(A;E)CM(B;E)C = M(AB;E)C$$

läßt erkennen, daß die Matrizen $M(A;E)C$ eine (ganzrationale) Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ vom Range k der Matrix C oder des Ranges des Moduls M bilden; mithin stimmt der Rang der Darstellung $M(A;E)C$ mit dem Grade der Darstellung $D(A)$ von $\mathfrak{G}_n$ überein. Die Gleichungen (42) und (43) liefern ferner die Verkettung

$$VD(A) = M(A;E)CV$$

mit der Matrix V, die gleichfalls den Rang k besitzt. Mithin ist die Darstellung $D(A)$ ganz in der Darstellung $M(A;E)C$ enthalten; da diese Darstellung aber den Rang k besitzt, müssen die Charakteristiken beider Darstellungen übereinstimmen. Es ist also

$$\sigma(D(A)) = \sigma(M(A;E)C).$$

Hieraus folgt aber

$$\sigma(D(A)) = \sum_{P} a(P)\sigma(M(A;P))$$

oder in der oben festgesetzten Bezeichnung:

$$\sigma(D(A)) = \sum_{P} a(P)\sigma(A;P). \tag{44}$$

Der zu dieser Charakteristik $\sigma(D(A))$ gehörige Charakter $\chi(P)$ der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ ist durch

$$\chi(P) = \sum_{R} a(R^{-1}PR) \tag{45}$$

gegeben, wobei die Summe über alle Elemente R von $\mathfrak{S}_m$ zu erstrecken ist. Die Zerlegung der Charakteristik

$$\sigma(D(A)) = \sum_{\lambda} r_\lambda \varphi_\lambda(A) \tag{46}$$

in die einfachen Charakteristiken $\varphi_\lambda(A)$ wird demnach durch

$$r_\lambda = \frac{1}{m!} \sum_P \chi_\lambda(P)\chi(P) = \frac{1}{m!} \sum_{R,P} a(R^{-1}PR)\chi_\lambda(P)$$

oder

$$r_\lambda = \sum_P a(P)\chi_\lambda(P) \tag{47}$$

gegeben, wobei $\chi_\lambda(P)$ den der einfachen Charakteristik $\varphi_\lambda(A)$ zugeordneten einfachen Charakter der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ bezeichnet.

Für den Satz 12 geben wir im Folgenden einige Beispiele, die die Einfachheit des angegebenen Verfahrens beleuchten sollen.

Satz 13. *Es bezeichne η eine primitive m-te Einheitswurzel, ferner V den Vollzyklus $V = (1, 2, \ldots, m)$ der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_m$. Dann erzeugt der Modul M aller Formen $g(\mathfrak{X})$ der Matrix $\mathfrak{X}$, die die Gleichung*

$$g(\mathfrak{X}V^{-1}) = \eta g(\mathfrak{X})$$

erfüllen, eine Darstellung $D(A)$ der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ des Grades

$$k = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu(d)\, n^{\frac{m}{d}}$$

und der Charakteristik

$$\sigma(D(A)) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu(d)\, s_d^{\frac{m}{d}}.$$

Dabei ist die Summe über alle Teiler d von m zu erstrecken, während $\mu(x)$ die Möbiussche Funktion, s_d die Spur der Potenz A^d von A bezeichnet.

Ist $f(\mathfrak{X})$ eine beliebige Form des Gesamtmoduls Γ, so erfüllt die Form

$$g(\mathfrak{X}) = \frac{1}{m} \sum_\nu \eta^{-\nu} f(\mathfrak{X}V^{-\nu}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1),$$

wie man leicht nachweist, die Bedingung

$$g(\mathfrak{X}V^{-1}) = \eta g(\mathfrak{X}).$$

Umgekehrt ist für jede Form $g(\mathfrak{X})$, die dieser Gleichung genügt, offenbar

$$g(\mathfrak{X}) = \frac{1}{m} \sum_\nu \eta^{-\nu} g(\mathfrak{X}V^{-\nu}).$$

Daher ist der Modul M aller Formen $g(\mathfrak{X})$, die die Gleichung

$$g(\mathfrak{X}V^{-1}) = \eta g(\mathfrak{X})$$

erfüllen, identisch mit dem Modul aller Formen

$$g(\mathfrak{X}) = \frac{1}{m} \sum_\nu \eta^{-\nu} f(\mathfrak{X}V^{-\nu}),$$

worin $f(\mathfrak{X})$ alle Formen des Moduls Γ zu durchlaufen hat. Da die Matrix

$$C = \frac{1}{m} \sum_\nu \eta^{-\nu} M(E; V^\nu)$$

der Gleichung $C^q = C$ genügt, sind die Voraussetzungen des Satzes 12 erfüllt. Daher besitzt die durch den Modul M erzeugte Darstellung $D(A)$ die Charakteristik

$$\sigma(D(A)) = \frac{1}{m} \sum_{\nu} \eta^{-\nu} \sigma(A; V^{\nu}).$$

Ist nun $(\nu, m) = d$, so zerfällt V^{ν} in d Zykeln der Ordnung $\frac{m}{d}$, weshalb

$$\sigma(A; V^{\nu}) = \sigma(A^{\frac{m}{d}})^d = s^d_{\frac{m}{d}}$$

ist, während η^{ν} eine primitive $\frac{m}{d}$-te Einheitswurzel ist. Da ferner die Summe der primitiven $\frac{m}{d}$-ten Einheitswurzeln gleich $\mu\left(\frac{m}{d}\right)$ ist, erhalten wir

$$\sigma(D(A)) = \frac{1}{m} \sum_{d/m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) s^d_{\frac{m}{d}}$$

oder

$$\sigma(D(A)) = \frac{1}{m} \sum_{d/m} \mu(d)\, s_d^{\frac{m}{d}},$$

wie behauptet worden ist. Den Grad der Darstellung entnimmt man hieraus für $A = E$ oder $s_d = n$; daher ist

$$k = \frac{1}{m} \sum_{d/m} \mu(d)\, n^{\frac{m}{d}}.$$

Satz 14. *Der Modul M aller zyklischen Formen $g(\mathfrak{X})$ des Gesamtmoduls Γ, d. h. aller Formen, die mit dem Vollzyklus $V = (1, 2, \ldots, m)$ der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ der Gleichung*

$$g(\mathfrak{X} V^{-1}) = g(\mathfrak{X})$$

genügen, erzeugt eine Darstellung $D(A)$ des Grades

$$k = \frac{1}{m} \sum_{d/m} \varphi(d)\, n^d$$

mit der Charakteristik

$$\sigma(D(A)) = \frac{1}{m} \sum_{d/m} \varphi\left(\frac{m}{d}\right) s_d^{\frac{m}{d}},$$

wobei $\varphi(x)$ die Eulersche Funktion bezeichnet und $s^d = \sigma(A^d)$ zu setzen ist.

Durchläuft $f(\mathfrak{X})$ den Gesamtmodul Γ, so erhalten wir alle zyklischen Formen $g(\mathfrak{X})$ in

$$g(\mathfrak{X}) = \frac{1}{m} \sum_{\nu} f(\mathfrak{X} V^{-\nu}) \quad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Da die Matrix

$$C = \frac{1}{m} \sum_{\nu} M(E; V^{\nu})$$

der Gleichung $C^2 = C$ genügt, folgt nach Satz 12 für die Charakteristik der durch den Modul M erzeugten Darstellung $D(A)$

$$\sigma(D(A)) = \frac{1}{m} \sum_{\nu} \sigma(A; V^{\nu}) = \frac{1}{m} \sum_{d/m} \varphi\left(\frac{m}{d}\right) s_d^{\frac{m}{d}},$$

wie man leicht nachrechnet. Der Grad k geht hieraus wiederum durch $s_d = n$ hervor.

Auf genau dem gleichen Wege beweist man den folgenden

Satz 14*. *Der Modul M aller gegenüber den Permutationen einer Untergruppe $\mathfrak{U}_m$ der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ invarianten Formen des Gesamtmoduls Γ, d. h. aller Formen, die der Gleichung*

$$g(\mathfrak{X} U^{-1}) = g(\mathfrak{X})$$

für jede Permutation U aus $\mathfrak{U}_m$ genügen, erzeugt eine Darstellung $D(A)$ der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ mit der Charakteristik

$$\sigma(D(A)) = \frac{1}{u} \sum_{U} \sigma(A; U),$$

wenn u die Ordnung von $\mathfrak{U}_m$ bezeichnet und die Summe über alle Elemente U von $\mathfrak{U}_m$ erstreckt wird.

Denn es können die Formen des Moduls M durch

$$g(\mathfrak{X}) = \frac{1}{u} \sum_{U} f(\mathfrak{X} U^{-1})$$

erhalten werden, wenn $f(\mathfrak{X})$ alle Formen von Γ durchläuft.

Satz 15. *Bezeichnet V den Vollzyklus $V = (1, 2, \ldots, m)$ der Gruppe $\mathfrak{S}_m$, durchläuft $f(\mathfrak{X})$ alle Formen des Gesamtmoduls Γ, so bilden die Formen*

$$g(\mathfrak{X}) = f(\mathfrak{X}) - f(\mathfrak{X} V^{-1})$$

einen Modul M, der eine Darstellung $D(A)$ des Grades

$$k = n^m - \frac{1}{m} \sum_{d/m} \varphi(d)\, n^d$$

mit der Charakteristik

$$\sigma(D(A)) = s_1^m - \frac{1}{m} \sum_{d/m} \varphi\left(\frac{m}{d}\right) s_d^{\frac{m}{d}}$$

erzeugt, wobei $\varphi(x)$ die Eulersche Funktion bezeichnet und $s_d = \sigma(A^d)$ zu setzen ist.

Zum Beweise bilden wir den Modul M^* aller Formen

$$h(\mathfrak{X}) = \frac{1}{m} \sum_{\nu} (f(\mathfrak{X}) - f(\mathfrak{X} V^{-\nu})) \quad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1)$$

und zeigen, daß M^* mit dem Modul M der Formen

$$g(\mathfrak{X}) = f(\mathfrak{X}) - f(\mathfrak{X}V^{-1})$$

identisch ist. In der Tat gilt

$$h(\mathfrak{X}) = \frac{1}{m}\sum_{\nu}(f(\mathfrak{X}) - f(\mathfrak{X}V^{-\nu})) = \frac{1}{m}\sum_{\nu}(m-\nu-1)(f(\mathfrak{X}V^{-\nu}) - f(\mathfrak{X}V^{-\nu-1}))$$

$$= f^*(\mathfrak{X}) - f^*(\mathfrak{X}V^{-1}),$$

wenn

$$f^*(\mathfrak{X}) = \frac{1}{m}\sum_{\nu}(m-\nu-1)f(\mathfrak{X}V^{-\nu})$$

gesetzt wird, andererseits ist

$$g(\mathfrak{X}) = f(\mathfrak{X}) - f(\mathfrak{X}V^{-1}) = \frac{1}{m}\sum_{\nu}(g(\mathfrak{X}) - g(\mathfrak{X}V^{-\nu})).$$

Betrachten wir nun den Modul der Formen

$$h(\mathfrak{X}) = \frac{1}{m}\sum_{\nu} f(\mathfrak{X}) - f(\mathfrak{X}V^{-\nu}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1),$$

so gilt für die zugehörige Matrix

$$C = \frac{1}{m}\sum_{\nu}(M(E;E) - M(E;V^{\nu}))$$

die Gleichung $C^2 = C$, weshalb der Satz 12 angewendet werden kann. Wir erhalten also für die Charakteristik der durch den Modul M erzeugten Darstellung $D(A)$ von $\mathfrak{G}_n$ den Ausdruck

$$\sigma(D(A)) = \frac{1}{m}\sum_{\nu}(\sigma(A;E) - \sigma(A;V^{\nu})),$$

also wie beim Beweise des Satzes 13 durch einfache Rechnung

$$\sigma(D(A)) = s_1^m - \frac{1}{m}\sum_{d/m}\varphi\left(\frac{m}{d}\right)s_d^{\frac{m}{d}}.$$

(Eingegangen am 2. April 1944.)

Über die Grenzwerte in Verbänden.

Von

G. G. Lorentz in Tübingen.

Einleitung.

In der letzten Zeit waren Verbände (teilweise geordnete Mengen) vielfacher Gegenstand von Untersuchungen [1]).

Wir stellen uns hier die Aufgabe, verschiedene Limesbildungen, die in Verbänden möglich sind, zu untersuchen und ihre Beziehungen zueinander zu finden. Für lineare Verbände wurde diese Aufgabe von L. KANTOROVITCH gelöst [2]) [3]). Einen weiteren Spezialfall der hier in § 3 untersuchten Verbände mit einer metrischen Funktion bilden die metrischen Verbände von G. BIRKHOFF [3a]), welche als Sonderfall die „stetigen Geometrien" von J. VON NEUMANN [4]) umfassen. In § 1 sind Axiome und Grundbegriffe zusammengestellt. Die Grundlage bildet der Begriff eines Verbandes: $Y = \{y\}$ heißt ein Verband [1]), wenn für gewisse Paare von Elementen y_1, y_2 aus Y eine transitive Beziehung $y_1 < y_2$ definiert ist. Für $y_2 < y_1$ schreiben wir auch $y_1 > y_2$; $y_1 \leqq y_2$ soll heißen $y_1 < y_2$ oder $y_1 = y_2$. Die Beziehungen $y_1 < y_2$, $y_1 = y_2$, $y_1 > y_2$ sind miteinander unverträglich. Ferner soll es für zwei beliebige Elemente y_1, y_2 aus Y zwei weitere u, v geben, so daß

$$u \leqq y_1, \; u \leqq y_2; \quad y_1 \leqq v, \; y_2 \leqq v$$

gilt und daß für jedes andere Paar u', v' mit diesen Eigenschaften $u' \leqq u$, $v \leqq v'$ ist. Diese eindeutig bestimmten Elemente u, v nennen wir die untere bzw. die obere Grenze des Elementenpaares y_1, y_2 und schreiben dafür

$$u = y_1 \cap y_2, \quad v = y_1 \cup y_2.$$

---

[1]) Man vergleiche die Literaturübersicht in dem Enzyklopädieartikel von H. HERMES und G. KÖTHE, Enzyklopädie der math. Wiss., 2. Aufl. Bd. I_1 Heft 5, Leipzig und Berlin, 1939 oder in G. BIRKHOFF, Lattice theory, New York 1940.

[2]) L. KANTOROVITCH, Lineare halbgeordnete Räume, Rec. math. (Moscou) 2 (2) 1937, S. 121—165.

[3]) Man vergleiche auch L. KANTOROVITCH, Sur les éspaces semiordonnés, Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. math., 1937, 91—110.

[4]) J. VON NEUMANN. Continuous geometry, Proc. nat. Acad. Sci. USA **22** (1936) 92—100, Examples of continuous geometries, ebenda, 101—108.

[3a]) G. BIRKHOFF, a. a. O. 1), S. 41 ff.

§ 2 bespricht verschiedene Limesbildungen in einem Verband Y. § 3 behandelt Verbände mit einer metrischen Funktion, die „symmetrisch" sind, d. h. deren Axiomatik durch Vertauschung von $<$ mit $>$ und von $\cap$ mit $\cup$ in sich selbst übergeht. Es werden Beziehungen der früher definierten Grenzwerte mit solchen studiert, die durch die metrische Funktion des Verbandes erzeugt werden. § 4 behandelt endlich die „unsymmetrischen" Verbände. Als Vorbild dafür diente uns der Hausdorffsche Raum der abgeschlossenen Untermengen eines metrischen Raumes (vgl. § 4, Beispiel 6)[4a].

§ 1.

Axiome und Grundbegriffe.

Eine Untermenge $A = \{y\}$ des Verbandes Y wollen wir nach oben beschränkt nennen, wenn ein Element v existiert, für welches gilt $y \leqq v$ für alle $y \in A$. v heißt dann eine obere Schranke von A. Ebenso wird die Menge A nach unten beschränkt genannt, wenn $u \leqq y$, $y \in A$ gilt für ein gewisses Element $u \in Y$. Gibt es unter den oberen Schranken v einer Menge A eine solche $\bar{y}$, die $\leqq$ allen anderen oberen Schranken ist, so nennen wir $\bar{y}$ die obere Grenze der Menge $A = \{y\}$ und bezeichnen sie mit $\bar{y} = \bigvee A = \bigvee_{y \in A} y$. Für eine endliche Menge $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ schreiben wir auch $\bar{y} = y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_n$. Auf ähnliche Weise wird die untere Grenze $\dot{y} = \bigwedge A = \bigwedge_{y \in A} y$ definiert. Aus den Eigenschaften eines Verbandes folgt leicht, daß jede endliche Menge $A \subset Y$ nach oben (unten) beschränkt ist und eine obere (untere) Grenze besitzt. Für unsere Zwecke brauchen wir aber mehr:

Axiom I. *Jede nach oben beschränkte Menge A hat eine obere Grenze.*

Ein duales Axiom dazu (in dem $<$ durch $>$ ersetzt ist) brauchen wir nicht:

Satz 1. *Jede nach unten beschränkte Menge $A \subset Y$ hat eine untere Grenze.*

Beweis. Es sei $B = \{u\}$ die Menge von allen unteren Schranken von A. Die Menge B ist nach oben beschränkt und jedes Element y von A ist eine obere Schranke. Deshalb ist $\dot{y} = \bigvee B \leqq y$, $y \in A$, d. h. $\dot{y}$ ist eine untere Schranke von A. Ferner ist $u \leqq \dot{y}$ für alle $u \in B$. Damit ist gezeigt, daß y die größte der unteren Schranken von A ist.

Ist der Verband Y selbst eine nach oben (bzw. nach unten) nicht beschränkte Menge, so führen wir das uneigentliche Element $+\infty$ (bzw. $-\infty$) ein, für das wir $y < +\infty$, $y \in Y$ setzen (bzw. $y > -\infty$, $y \in Y$). Dieses angenommen, hat jede Menge $A \subset Y$ eine (endliche oder unendliche) obere und untere Grenze.

[4a] Diese Arbeit war im Wesentlichen 1939 abgeschlossen; eine Verkettung unglücklicher Umstände hat ihre Veröffentlichung verzögert.

Es gilt:

(1) $$\bigwedge A \leqq \bigvee A \qquad (A \neq 0),$$

(2) $$\bigvee_{\xi \in \Xi} (\bigvee A_\xi) = \bigvee \left(\sum_{\xi \in \Xi} A_\xi \right)$$

für eine beliebige Indexmenge $\Xi = \{\xi\}$,

(3) $$\bigvee A \leqq \bigvee B, \ \bigwedge A \geqq \bigwedge B, \text{ wenn } A \subset B \text{ ist.}$$

Ist $y \leqq y'$ für beliebige y, y' mit $y \in A$, $y' \in B$, so gilt

(4) $$\bigvee A \leqq \bigwedge B.$$

Gibt es für jedes $y \in A$ ein $y' \in B$ mit $y \leqq y'$, so ist

(5) $$\bigvee A \leqq \bigvee B.$$

Ist $A \subset B$ und gibt es für jedes $y' \in B$ ein $y \in A$ mit $y' \leqq y$, so ist

(6) $$\bigvee A = \bigvee B.$$

Außerdem gelten die zu (2), (5), (6) dualen Beziehungen. Die einfachen Beweise überlassen wir dem Leser.

Wir können jetzt, für eine gegebene Folge $\{y_n\}$, $y_n \in Y$, den oberen $\overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$ und den unteren Limes $\underline{\lim}_{n \to \infty} y_n$ auf gewöhnliche Art einführen. Wir setzen:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} y_n = \bigwedge_{n = 1, 2, \ldots} \left(\bigvee_{k \geqq n} y_k \right), \qquad \underline{\lim_{n \to \infty}} y_n = \bigvee_{n = 1, 2, \ldots} \left(\bigwedge_{k \geqq n} y_k \right).$$

Diese Grenzwerte existieren für jede Folge, können aber unter Umständen unendlich sein. Es gelten folgende leicht beweisbare Beziehungen:

(7) $$\bigwedge_n y_n \leqq \underline{\lim}\, y_n \leqq \overline{\lim}\, y_n \leqq \bigvee_n y_n$$

(8) $$\underline{\lim}\, y_n \leqq \underline{\lim}\, z_n; \quad \overline{\lim}\, y_n \leqq \overline{\lim}\, z_n, \text{ falls } y_n \leqq z_n,$$

(9) $$\underline{\lim_{n \to \infty}} y_n \leqq \underline{\lim_{k \to \infty}} y_{n_k} \leqq \overline{\lim_{k \to \infty}} y_{n_k} \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} y_n,$$

falls $\{y_{n_k}\}$ eine Unterfolge von $\{y_n\}$ ist.

(10) Damit $\{y_n\}$ von oben beschränkt ist, ist $\overline{\lim}\, y_n < +\infty$ notwendig und hinreichend.

Fallen die Grenzwerte

$$\underline{\lim}\, y_n = \overline{\lim}\, y_n = y$$

zusammen, so nennen wir die Folge $\{y_n\}$ konvergent gegen y und schreiben $\lim y_n = y$. Es sei bemerkt, daß in dieser Definition ausdrücklich vorausgesetzt ist, daß $y \in Y$ ist, also nicht $y = \pm \infty$ sein darf. Wir führen jetzt einige Eigenschaften der konvergenten Folgen an. Nach (10) ist jede konvergente Folge beschränkt. Jede konstante Folge $y_n = y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist gegen y konvergent. Aus (9) folgt

weiter, daß mit der Folge $\{y_n\}$ auch jede ihrer Unterfolgen gegen denselben Grenzwert konvergiert. Schließlich haben wir: Aus

$$y_n \leqq z_n \leqq y'_n, \quad \lim y_n = \lim y'_n = y$$

folgt $\lim z_n = y$.

Man kann im Verband Y eine Konvergenz noch auf andere Art einführen[5]). Die Folge $\{y_n\}$ nennen wir (*)-konvergent gegen y:

$$y_n \to y(*), \quad \lim_{n\to\infty}{}^{*}\, y_n = y,$$

wenn es zu jeder Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ eine weitere $\{y_{n_{k_i}}\}$ gibt mit $\lim_{i\to\infty} y_{n_{k_i}} = y$. Ist $y_n \to y(*)$, $y'_n \to y(*)$, so folgt aus der Definition der (*)-Konvergenz, daß auch $z_k \to y(*)$ gilt für eine Folge $\{z_k\}$, die aus allen Elementen der beiden ersten in beliebiger Reihenfolge gebildet ist.

Als ein weiteres Axiom führen wir ein:

Axiom II. *Für jede Menge $A \subset Y$ gibt es eine abzählbare Teilmenge $A' \subset A$ derart, daß*

$$\wedge A' = \wedge A; \quad \vee A' = \vee A.$$

Endlich brauchen wir die Axiome der Distributivität:

Axiom III a. $y \cup (y_1 \cap y_2) = (y \cup y_1) \cap (y \cup y_2)$.

Axiom III b. $y \cup \bigwedge_{n=1,2,\ldots} y_n = \bigwedge_{n=1,2,\ldots} (y \cup y_n)$

$$y \cap \bigvee_{n=1,2,\ldots} y_n = \bigvee_{n=1,2,\ldots} (y \cap y_n),$$

wenn $\wedge y_n$ bzw. $\vee y_n$ endlich ist.

Axiom III c. *Sind A_ξ für $\xi \in \Xi$ Untermengen von Y, und bedeutet y_ξ eine beliebige Funktion von $\xi \in \Xi$, deren Wert y_ξ ein Element von A_ξ ist, so gilt*

$$\bigvee_{\xi\in\Xi} (\wedge A_\xi) = \bigwedge_{\{y_\xi\}} \left(\bigvee_{\xi\in\Xi} y_\xi \right)$$

$$\bigwedge_{\xi\in\Xi} (\vee A_\xi) = \bigvee_{\{y_\xi\}} \left(\bigwedge_{\xi\in\Xi} y_\xi \right),$$

wenn alle $\wedge A_\xi$ bzw. alle $\vee A_\xi$ endlich sind.

Rechts in diesen Formeln wird die untere bzw. obere Grenze auf alle möglichen Funktionen y_ξ erstreckt.

Offenbar sind diese Axiome in aufsteigender Stärke geordnet. Aus III a folgt das duale dazu und sogar III c für endliche Ξ, A_ξ[6]). Aus III b folgt leicht III c für endliche Ξ, abzählbare A_ξ. Im Folgenden wird immer angegeben, welches von den Distributivitätsaxiomen als gültig vorausgesetzt ist.

Wir geben jetzt einige Beispiele von Verbänden an. Dort, wo es sich um Verbände handelt, deren Elemente Mengen sind, soll $y_1 < y_2$ immer bedeuten: $y_1 \subset y_2$ und $y_1 \neq y_2$.

[5]) Vgl. L. Kantorovitch, a. a. O. [2]).

[6]) Vgl. O. Ore, Ann. of math. **36** (1935), 406—437.

Beispiel 1. Der Verband aller Untermengen y einer festen Menge M. Dann ist das Axiom I erfüllt, II im allgemeinen nicht. Da hier die obere Grenze die Summe, die untere Grenze den Durchschnitt der Mengen bedeutet, ist von den Distributivitätsaxiomen sogar das stärkste III c erfüllt.

Beispiel 2. Der Verband von allen konvexen Untermengen der Geraden (d. h. von offenen, halboffenen und abgeschlossenen Intervallen). Die Axiome I, II sind erfüllt; die untere Grenze ist dabei der Durchschnitt, die obere Grenze die konvexe Hülle der Summe. Dagegen gilt III a nicht. Für die offenen Intervalle

$$y = (0, 1), \quad y_1 = (1, 2), \quad y_2 = (2, 3)$$

ist z. B.

$$y \cup (y_1 \cap y_2) = (0, 1), \quad (y \cup y_1) \cap (y \cup y_2) = (0, 2).$$

Beispiel 3. Der Verband Y bestehe aus allen nach Lebesgue meßbaren Untermengen y des Intervalls $I = (0, 1)$. Dabei sollen alle untereinander äquivalenten Mengen identifiziert werden. Die obere (untere) Grenze einer endlichen oder abzählbaren Menge von Elementen ist auch hier die Summe (der Durchschnitt). Das Axiom I ist erfüllt: Es sei $A = \{y\}$ eine beliebige Menge der Elemente $y \in Y$. Wir betrachten dann alle endlichen Summen:

$$z = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

(n ist eine beliebige natürliche Zahl). m_0 sei die obere Grenze von ihren Maßen mz. Dann kann man eine wachsende Folge $z_1 \leqq z_2 \leqq \ldots \leqq z_n \leqq \ldots$ dieser Summen angeben, für die $\lim mz_n = m_0$, also $mz_0 = m_0$ für $z_0 = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$ ist. Nun enthält z_0 alle $y \in A$. Denn sonst würde es ein y_0 geben mit der Eigenschaft $m(y_0 + z_0) > m_0$, also $m(y_0 + z_n) > m_0$ für genügend große n, was der Definition von m_0 widerspricht. Wir haben also $z_0 = \bigvee A$.

Axiom II ist auch mitbewiesen, denn drückt man z_0 durch y aus:

$$z_n = y_{1n} + y_{2n} + \cdots + y_{k_n n},$$

so ist $A' = \{y_{kn}\}$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$, $n = 1, 2, \ldots$ eine abzählbare Untermenge von A mit $\bigvee A' = \bigvee A = z_0$.

III b ist hier erfüllt, III c aber nicht; setzen wir z. B.

$$y_t^1 = (0, t), \quad y_t^2 = (t, 1), \quad A_t = \{y_t^1, y_t^2\} \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

so wird

$$\bigwedge_{0 \leqq t \leqq 1} (\bigvee A_t) = (0, 1); \qquad \bigvee_{\{i(t)\}} \left(\bigwedge_{0 \leqq t \leqq 1} y_t^{i(t)} \right) = 0.$$

($i(t)$ bedeutet hier eine beliebige Funktion im Intervall $(0, 1)$ mit den Werten 1, 2).

Die Konvergenz ist hier die Konvergenz der Mengen (d. h. der zugehörigen charakteristischen Funktionen) fast überall, die (*)-Konvergenz — die Konvergenz nach dem Maß. Das ergibt sich aus den

Sätzen 8 und 9 von § 3, wenn man $\varrho(y_1, y_2)$ für $y_1 \leqq y_2$ gleich dem Maß $m(y_2 - y_1)$ setzt.

Beispiel 4. Der Verband von allen Untermengen von (0, 1), wobei Mengen, die sich um höchstens abzählbar viele Punkte unterscheiden, identifiziert werden. Das Axiom I ist in dem Spezialfall erfüllt, wenn A eine abzählbare oder endliche Menge ist (und die obere Grenze ist dann die Summe der Mengen). Für unabzählbare Mengen ist I falsch: Zerlegt man (0, 1) in eine unabzählbare Menge $A = \{y_\xi\}$, $\xi \in \Xi$ von punktfremden unabzählbaren Mengen y_ξ, so existiert $\bigvee A$ nicht. Das Axiom III b ist erfüllt, II und III c haben im allgemeinen keinen Sinn.

Beispiel 5. Y besteht aus allen Punkten $y = (u, v)$ des Quadrats $0 \leqq u \leqq 1$; $0 \leqq v \leqq 1$. Es soll $(u_1, v_1) < (u_2, v_2)$ dann und nur dann sein, wenn entweder $u_1 < u_2$ ist, oder $u_1 = u_2$ und $v_1 < v_2$. Hier sind alle Axiome I, II, III c erfüllt.

Als weitere Beispiele kann man die linearen halbgeordneten Räume von L. Kantorovitch [2]) sowie ihre Untermengen anführen.

§ 2.

Grenzwerte in allgemeinen Verbänden.

Für eine gegebene Folge $\{y_n\}$, $y_n \in Y$ führen wir folgende Limesbildungen ein: Den größten oberen Limes

$$\overline{\text{o-lim}}\, y_n = \bigwedge_{n=1,2,\ldots} \left(\bigvee_{k \geqq n} y_k \right) = \overline{\lim}\, y_n$$

und den kleinsten oberen Limes

$$\underline{\text{o-lim}}\, y_n = \bigwedge_{\{n_k\}} \left(\bigvee_{k=1,2,\ldots} y_{n_k} \right)$$

($\bigwedge$ wird hier auf alle Folgen $n_1 < n_2 < \ldots$ von natürlichen Zahlen erstreckt).

Den größten oberen (*)-Limes $\overline{\text{o-lim}}^*\, y_n$ definieren wir als das kleinste (endliche oder unendliche) y, das die folgende Eigenschaft besitzt: (A). Zu jeder Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ gibt es eine weitere Unterfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ derart, daß $y \geqq \overline{\lim_{i \to \infty}}\, y_{n_{k_i}}$ ist.

Wir können endlich duale Limites zu diesen betrachten: den kleinsten unteren Limes $\underline{\text{u-lim}}\, y_n = \underline{\lim}\, y_n$, den größten unteren $\overline{\text{u-lim}}\, y_n$ und den kleinsten unteren (*)-Limes $\underline{\text{u-lim}}^*\, y_n$.

Wir zeigen jetzt, daß die definierten (*)-Limites wirklich existieren. Nach dem Axiom II können wir eine solche Folge $\{y^k\}$ aus den die Eigenschaft (A) besitzenden Elementen y^k angeben, daß $y_0 = \bigwedge y^k$ gleich der unteren Grenze von allen Elementen y mit der Eigenschaft (A) ist. Nehmen wir eine beliebige Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ der Grundfolge $\{y_n\}$, so gibt es eine weitere Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$, für die $y' \geqq \overline{\lim}\, y_{n_{k_i}}$ ist; aus dieser kann man wieder eine Teilfolge $\{y_{n_{k_{i_j}}}\}$ herausgreifen, für welche $y^2 \geqq \overline{\lim}\, y_{n_{k_{i_j}}}$

wird usw. Für die Diagonalfolge $\{z_m\}$ von allen diesen Unterfolgen haben wir

$$y^k \geqq \overline{\lim}\, z_m$$

für alle $k = 1, 2, \ldots$, also auch

$$y_0 \geqq \overline{\lim}\, z_m .$$

y_0 hat also die Eigenschaft (A), w. z. b. w.

Für den kleinsten oberen Limes kann man auch schreiben[7]:

$$\text{(11)} \qquad \underline{\text{o-lim}}\, y_n = \bigwedge_{\{n_k\}} \overline{\lim_{k\to\infty}}\, y_{n_k} .$$

In der Tat, es ist

$$\bigwedge_{\{n_k\}} \overline{\lim}\, y_{n_k} = \bigwedge_{\{n_k\}} \Big[\bigwedge_{i=1,2,\ldots} \Big(\bigvee_{k \geqq i} y_{n_k} \Big) \Big]$$

$$= \bigwedge_{i,\{n_k\}} \Big(\bigvee_{k\geqq i} y_{n_k} \Big) = \bigwedge_{\{n_k\}} \Big(\bigvee_{k=1,2,\ldots} y_{n_k} \Big),$$

da die Gesamtheit aller Abschnitte $\{n_k\}$, $k \geqq i$ von Folgen $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen mit der Gesamtheit aller dieser Folgen zusammenfällt.

Satz 2. *Es ist*

$$\text{(12)} \qquad \underline{u} \leqq \underline{u}^* \leqq \underline{\bar{u}} \leqq \bar{o}^* \leqq \bar{o},$$

mit leicht verständlichen Abkürzungen, z. B. $\bar{o}$ für $\overline{\text{o-lim}}\, y_n$.

Beweis. Die Beziehung $\bar{o} \geqq \bar{o}^*$ ist klar, da das Element $\bar{o}$ die Eigenschaft (A) besitzt. Auch $\bar{o}^* \geqq \underline{o}$ folgt sofort aus (11). Wir beweisen jetzt $\bar{o}^* \geqq \bar{u}$. Das Element $\bar{o}^*$ hat die Eigenschaft (A); deshalb existiert für eine beliebige Folge $\{n_k\}$ eine Unterfolge $\{n_{k_i}\}$, für die

$$\bar{o}^* \geqq \overline{\lim}\, y_{n_{k_i}} \geqq \bigwedge_i y_{n_{k_i}} \geqq \bigwedge_k y_{n_k} .$$

Es ist also

$$\bar{o}^* \geqq \bigvee_{\{n_k\}} \Big(\bigwedge_k y_{n_k} \Big) = \bar{u}.$$

Die übrigen Beziehungen (12) sind zu den bewiesenen dual.

Wir können nun folgende Formen der Konvergenz einer Folge $\{y_n\}$ definieren: Die obere Konvergenz, wenn für die Folge $\bar{o} = \underline{o}$ ist; die untere Konvergenz $\underline{u} = \bar{u}$ und endlich die $(*)$-Konvergenz, die durch $\underline{u}^* = \bar{o}^*$ ausgedrückt wird.

Diese $(*)$-Konvergenz ist mit der früher eingeführten identisch. In der Tat, $\underline{u}^* = \bar{o}^*$ ist mit der Existenz eines Elementes y gleichbedeutend, welches die Eigenschaft (A) und zugleich die zu ihr duale besitzt. Das

[7]) Einen kleinsten oberen $(*)$-Limes als Analogon zu (11) einzuführen: $\underline{\text{o-lim}}^*\, y_n = \bigwedge \overline{\lim}\, y_{n_k}$ hat keinen Sinn, da dieses. wie man leicht zeigt, mit $\underline{\text{o-lim}}\, y_n$ zusammenfällt. Weiter schreiben wir auch $\overline{\lim}^*\, y_n$, $\underline{\lim}^*\, y_n$ statt $\overline{\text{o-lim}}^*\, y_n$, $\underline{\text{u-lim}}^*\, y_n$.

läßt sich (eventuell durch Übergang zu einer Unterfolge der gegebenen Folge) auf die Form bringen: Zu jeder Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ gibt es eine weitere $\{y_{n_{k_i}}\}$, für die $y \geqq \overline{\lim}\, y_{n_{k_i}}$, $y \leqq \underline{\lim}\, y_{n_{k_i}}$, also $y = \lim y_{n_{k_i}}$ ist.

Satz 2*. *Aus* III c *folgt*

$$u = u^* = o; \quad \bar{u} = \bar{o}^* = \bar{o}. \tag{13}$$

Es sei Π die Gesamtheit von allen wachsenden Folgen $\pi = \{n_k\}$ von natürlichen Zahlen, $k(\pi)$ seien ganzzahlige Funktionen, die für $\pi \in \Pi$ definiert sind. Dann ist nach III c

$$\bar{u} = \bigvee_{\pi \in \Pi} \left(\bigwedge_k y_{n_k} \right) = \bigwedge_{\{n_k\}} \left(\bigvee_{\pi \in \Pi} y_{n_{k(\pi)}} \right).$$

Die untere Grenze rechts ist auf alle solche Funktionen $k(\pi)$ erstreckt. Für eine feste Funktion $k(\pi)$ durchläuft $y_{n_{k(\pi)}}$ für $\pi \in \Pi$ fast alle y_n, denn jede unendliche Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ enthält ein Element dieser Art. Es ist also

$$\bar{u} \geqq \bigwedge_n \left(\bigvee_{k \geqq n} y_k \right) = \bar{o},$$

und wegen (12) ist $\bar{u} = \bar{o}^* = \bar{o}$.

In den folgenden Sätzen dieses Paragraphen wird das Axiom III b benutzt.

Satz 3. *Der obere Limes* $\bar{y} = \overline{\lim}\, y_n$ *ist das kleinste (endliche oder unendliche)* y, *für das gilt*

$$y \cup y_n \to y. \tag{14}$$

Beweis. Ist $\bar{y} = +\infty$ oder $-\infty$, so ist unsere Behauptung offenbar richtig (§ 1, (10)). Wir dürfen also $\bar{y}$ endlich annehmen. Wir setzen $\bar{y}_k = \bigvee_{n \geqq k} y_n$. Die Bedingung (14) ist mit der folgenden gleichbedeutend:

$$y = \lim (y \cup y_n),$$

d. h.

$$y = \bigwedge_{k=1,2,\ldots} \left(y \cup \bigvee_{n \geqq k} y_n \right) = \bigwedge_{k=1,2,\ldots} (y \cup \bar{y}_k)$$

$$= y \cup \bigwedge_{k=1,2,\ldots} \bar{y}_k = y \cup \bar{y}$$

oder $y \geqq \bar{y}$.

Satz 4. *Der obere* (*)*-Limes* $\bar{y}^* = \overline{\lim}^*\, y_n$ *ist das kleinste (endliche oder unendliche)* y, *für das gilt*

$$y \cup y_n \to y\,(*). \tag{15}$$

In der Tat, diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, daß aus jeder Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ eine weitere $\{y_{n_{k_i}}\}$ sich aussondern läßt, für welche gilt $y \cup y_{n_{k_i}} \to y$, d. h. $y \geqq \overline{\lim}\, y_{n_{k_i}}$. Nach der Definition des oberen (*)-Limes bedeutet (15) also $y \geqq \overline{\lim}^*\, y_n$, w. z. b. w.[8]).

[8]) Man kann die Sätze 3, 4 offenbar auch so fassen: $\overline{\lim}\, y_n$ bzw. $\overline{\lim}^*\, y_n$ ist die untere Grenze der Elemente $y \in Y$, für die $y \cup y_n \to y$ bzw. $y \cup y_n \to y\,(*)$ gilt.

Auf ähnliche Weise lassen sich die unteren Limites charakterisieren.

Satz 5. *Es ist*

a) $$\operatorname{Lim}(y_n \cup y'_n) \geqq \operatorname{Lim} y_n \cup \operatorname{Lim} y'_n$$

b) $$\overline{\lim}(y_n \cup y'_n) = \overline{\lim} y_n \cup \overline{\lim} y'_n$$

b*) $$\overline{\lim}^*(y_n \cup y'_n) = \overline{\lim}^* y_n \cup \overline{\lim}^* y'_n .$$

Bei a) bedeutet Lim eine beliebige der früher eingeführten Limesbildungen. Bei b), b*) werden die rechts stehenden $\overline{\lim} y_n$, $\overline{\lim}^* y_n$ usw. endlich vorausgesetzt. Außerdem gelten die dualen Beziehungen mit $\cap$ statt $\cup$ und $\underline{\lim}$ statt $\overline{\lim}$.

Beweis. a) ist evident. Wir beweisen b). Es ist, wenn wir

$$\bar{y}_n = \bigvee_{k \geq n} y_k, \quad \bar{y}'_n = \bigvee_{k \geq n} y'_k$$

setzen,

$$\overline{\lim} y_n \cup \overline{\lim} y'_n = \overline{\lim} y_n \cup \bigwedge_{n=1,2,\ldots} \bar{y}'_n = \bigwedge_{n=1,2,\ldots} (\overline{\lim_{m \to \infty}} y_m \cup \bar{y}'_n)$$

$$= \bigwedge_{n=1,2,\ldots} [(\bigwedge_{m=1,2,\ldots} \bar{y}_m) \cup \bar{y}'_n] = \bigwedge_{n} \bigwedge_{m} [(\bar{y}_m \cup \bar{y}'_n)] = \bigwedge_{n,m=1,2,\ldots} (\bar{y}_m \cup y'_n).$$

Nun sind $\bar{y}_m$, $\bar{y}'_n$ monoton abnehmend, also $\bar{y}_m \cup \bar{y}'_n \geqq \bar{y}_p \cup \bar{y}'_p$, wo p die größere der beiden Zahlen m, n bedeutet. Nach § 1, duale Beziehung zu (6), ist also

$$\overline{\lim} y_n \cup \overline{\lim} y'_n = \bigwedge_{p=1,2,\ldots} (\bar{y}_p \cup \bar{y}'_p) = \bigwedge_{p} [\bigvee_{q \geq p} (y_q \cup y'_q)] = \overline{\lim}(y_q \cup y'_q).$$

Wir beweisen jetzt b*). Es sei $z_n = y_n \cup y'_n$ und $y = \overline{\lim}^* y_n \cup \overline{\lim}^* y'_n$. Da $y \geqq \overline{\lim}^* y_n$ ist, gibt es für eine beliebige wachsende Folge $\{n_k\}$ von natürlichen Zahlen eine Unterfolge $\{n_{k_i}\}$, für die $y \geqq \overline{\lim} y_{n_k}$ ist. Da außerdem $y \geqq \overline{\lim}^* y'_n \geqq \overline{\lim}^* y'_{n_{k_i}}$ gilt, gibt es eine weitere Unterfolge $\{\bar{n}_j\}$ mit der Eigenschaft $y \geqq \overline{\lim} y'_{\bar{n}_j}$. Wir haben also

$$y \geqq \overline{\lim} y_{\bar{n}_j} \cup \overline{\lim} y'_{\bar{n}_j} = \overline{\lim}(y_{\bar{n}_j} \cup y'_{\bar{n}_j}) = \overline{\lim} z_{\bar{n}_j}.$$

Damit ist bewiesen, daß $y \geqq \overline{\lim}^* z_n$ ist und zusammen mit a) erhalten wir b*).

Aus dem bewiesenen Satz folgt insbesondere, daß die obere und die untere Grenze in Bezug auf die gewöhnliche und die (*)-Konvergenz stetig sind: Aus $y_n \to y$, $y'_n \to y'$ folgt für $y \in Y$, $y' \in Y$:

$$y_n \cup y'_n \to y \cup y', \quad y_n \cap y'_n \to y \cap y'$$

usw.

§ 3.

Verbände mit einer metrischen Funktion.

Wir betrachten jetzt einen Verband Y, der dem Axiom I genügt[9]). Für jedes Paar von vergleichbaren Elementen y_1, y_2, $y_1 \leqq y_2$ sei eine nichtnegative Zahl $\varrho(y_1, y_2)$ definiert, die wir die metrische Funktion

[9]) Wir brauchen in § 3 das Axiom I nur für abzählbare A.

des Verbandes Y nennen und die folgenden Bedingungen genügen soll:

1° $\varrho(y_1, y_2) = 0$ *ist mit* $y_1 = y_2$ *gleichbedeutend;*

2° $\varrho(y_1, y_3) \leqq \varrho(y_1, y_2) + \varrho(y_2, y_3)$ *für* $y_1 \leqq y_2 \leqq y_3$.

3° $\varrho(y \cup y_1, y \cup y_2) \leqq \varrho(y_1, y_2)$

$\varrho(y \cap y_1, y \cap y_2) \leqq \varrho(y_1, y_2)$.

4° *Konvergiert* y_n *monoton gegen* y, *so ist*

$$\varrho(y, y_n) \to 0 \quad \text{bzw.} \quad \varrho(y_n, y) \to 0.$$

5° *Für keine monoton gegen* $+\infty$ oder $-\infty$ *konvergierende Folge* y_n *soll sein*

$$\lim_{n, m \to \infty} \varrho(y_n, y_m) = 0.$$

Spezialfälle solcher Verbände sind z. B. die linearen halbgeordneten Räume von L. Kantorovitch oder ihre Untermengen [10]). Ein weiteres Beispiel bilden die metrischen Verbände von G. Birkhoff [11]).

Aus 3° folgt für $y_1 \leqq y_2 \leqq y_3$:

$$\varrho(y_1, y_2) \leqq \varrho(y_1, y_3); \quad \varrho(y_2, y_3) \leqq \varrho(y_1, y_3). \tag{16}$$

Wir setzen allgemein:

$$\varrho(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \varrho(y_1 \cap y_2 \cap \ldots \cap y_n, y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_n). \tag{17}$$

Dann wird 1° und 3° sogar für beliebige y_1, y_2 richtig. Es ist z. B. nach 3°

$$\begin{aligned} \varrho(y_1, y_2) = \varrho(y_1 \cap y_2, y_1 \cup y_2) &\geqq \varrho(y \cup (y_1 \cap y_2), y \cup y_1 \cup y_2) \\ &\geqq \varrho(\bar{y}_1 \cap \bar{y}_2, \bar{y}_1 \cup \bar{y}_2) = \varrho(\bar{y}_1, \bar{y}_2), \end{aligned}$$

wo $\bar{y}_1 = y \cup y_1$, $\bar{y}_2 = y \cup y_2$ gesetzt wurde [12]).

Die Dreieckungleichung gilt im allgemeinen nicht; als ein Ersatz dafür kann die folgende Ungleichung dienen

$$\begin{aligned} &\varrho(y_1, y_2) + \varrho(y_2, y_3) + \cdots + \varrho(y_{n-1}, y_n) \\ &\geqq \varrho(y_1 \cap y_2, y_1 \cup y_2) + \varrho(y_1 \cup (y_2 \cap y_3), y_1 \cup y_2 \cup y_3) + \cdots \\ &\cdots + \varrho(y_1 \cup \ldots \cup y_{n-2} \cup (y_{n-1} \cap y_n), y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_n) \\ &\geqq \varrho(y_1 \cap y_2, y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_n). \end{aligned}$$

Wir benutzen hier 2°, 3° und (16). Ebenso erhält man

$$\delta(y_1, y_2) + \varrho(y_2, y_3) + \cdots + \varrho(y_{n-1}, y_n) \geqq \varrho(y_1 \cap y_2 \cap \ldots \cap y_n, y_1 \cup y_2).$$

Durch Addieren der vorstehenden Ungleichungen bekommen wir

$$\varrho(y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqq 2\varrho(y_1, y_2) + 2\varrho(y_2, y_3) + \cdots + 2\varrho(y_{n-1}, y_n). \tag{18}$$

[10]) Vgl. Kantorovitch a. a. O. 2), 3).

[11]) a. a. O. 1), S. 41. Dort wird die Existenz eines Funktionals $m(y)$ mit den Eigenschaften 1) aus $y_1 < y_2$ folgt $m(y_1) < m(y_2)$ und 2) $m(y_1) + m(y_2) = m(y_1 \cup y_2) + m(y_1 \cap y_2)$ vorausgesetzt. Für die metrische Funktion $\varrho(y_1, y_2) = m(y_2) - m(y_1)$ sind dann unsere Bedingungen 1°—3° erfüllt, 3° sogar in verschärfter Form $\varrho(y \cup y_1, y \cup y_2) + \varrho(y \cap y_1, y \cap y_2) \leqq \varrho(y_1, y_2)$. Und für die stetigen metrischen Verbände mit kleinstem und größtem Element, die Birkhoff weiter (S. 44) betrachtet, sind sogar alle Bedingungen 1°—5° erfüllt.

[12]) Denn es ist immer $y \cup (y_1 \cap y_2) \leqq (y \cup y_1) \cap (y \cup y_2)$.

Für $n = 3$ ist

$$\varrho(y_1, y_2, y_3) \leqq \varrho(y_1 \cap y_2 \cap y_3, y_1 \cap y_2) + \varrho(y_1 \cap y_2, y_1 \cup y_2 \cup y_3)$$
$$\leqq \varrho(y_1, y_2) + 2\varrho(y_2, y_3).$$

Umsomehr ist

$$\varrho(y_1, y_3) \leqq \varrho(y_1, y_2) + 2\varrho(y_2, y_3).$$

Daraus folgt

$$|\varrho(y_1, y_2) - \varrho(y_1, y_3)| \leqq 2\varrho(y_2, y_3). \tag{19}$$

Als Verallgemeinerung haben wir

$$|\varrho(y_1, y_2) - \varrho(z_1, z_2)| \leqq |\varrho(y_1, y_2) - \varrho(y_1, z_2)| + |\varrho(y_1, z_2) - \varrho(z_1, z_2)|$$
$$\leqq 2\varrho(y_1, z_1) + 2\varrho(y_2, z_2).$$

Setzen wir zur Abkürzung $\dot{y} = y_1 \cap y_2 \cap \ldots \cap y_n$, $\bar{y} = y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_n$, so wird

$$|\varrho(y_1, y_2, \ldots, y_n, y) - \varrho(y_1, y_2, \ldots, y_n, z)|$$
$$= |\varrho(\dot{y} \cap y, \bar{y} \cup y) - \varrho(\dot{y} \cap z, \bar{y} \cup z)|$$
$$\leqq 2\varrho(y, z) + 2\varrho(y, z) = 4\varrho(y, z).$$

Daraus folgt leicht

$$|\varrho(y_1, y_2, \ldots, y_n) - \varrho(z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqq 4\varrho(y_1, z_1) + \cdots + 4\varrho(y_n, z_n). \tag{20}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir beweisen:

Satz 6. *$\varrho(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ist eine stetige Funktion der Argumente.*

Beweis. Wir zeigen zunächst daß $\varrho(y^k, y) \to 0$ aus $y^k \to y$ folgt. Es sei $\dot{y}^k = \bigwedge_{n \geqq k} y^n$, $\bar{y}^k = \bigvee_{n \geqq k} y^n$. Dann streben $\dot{y}^k$, $\bar{y}^k$ monoton gegen y und deshalb nach 4°

$$0 \leqq \varrho(\dot{y}^k, \bar{y}^k) \leqq \varrho(\dot{y}^k, y) + \varrho(y, \bar{y}^k) \to 0.$$

Da y und y^k zwischen $\dot{y}^k$ und $\bar{y}^k$ liegen, ist umsomehr $\varrho(y^k, y) \to 0$.

Nun sei $y_i^k \to y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dann ist nach (20)

$$|\varrho(y_1^k, \ldots, y_n^k) - \varrho(y_1, \ldots, y_n)| \leqq 4\varrho(y_1^k, y_1) + \cdots + 4\varrho(y_n^k, y_n) \to 0,$$

w. z. b. w.

Bemerkung. Wie man sich leicht überzeugt, ist unsere Behauptung auch in Bezug auf die (*)-Konvergenz richtig.

Satz 7. *Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen ein endliches Element konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}) = 0. \tag{21}$$

Beweis. Ist die Folge gegen y konvergent, und definiert man $\dot{y}_n$, $\bar{y}_n$ ähnlich wie in Satz 6, so ist nach 4° $\varrho(\dot{y}_n, y) \to 0$, $\varrho(\bar{y}_n, y) \to 0$. Es ist dann

$$0 \leqq \varrho(y, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}) \leqq \varrho(\dot{y}_n, \bar{y}_n) \to \varrho(y, y) = 0,$$

womit wir sogar mehr bewiesen haben, als behauptet war.

Es sei jetzt die Bedingung (21) erfüllt. Wir setzen

$$\bar{y}_n^m = y_n \cup y_{n+1} \cup \ldots \cup y_m \qquad (n \leqq m).$$

Dann folgt

$$\varrho(\bar{y}_n^m, \bar{y}_n^{m+p}) = \varrho(y_n \cup \ldots \cup y_m, y_n \cup \ldots \cup y_{m+p})$$
$$\leqq \varrho(y_m, y_m \cup \ldots \cup y_{m+p}) \leqq \varrho(y_m, y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}) \to 0$$

für $m \to \infty$. Nach Axiom 5° ist also die monoton nicht abnehmende Folge $\bar{y}_n^m (m = n, n+1, \ldots)$ gegen ein endliches Element $\bar{y}_n = \bigvee_{k \geqq n} y_k$ konvergent. Auf ähnliche Weise zeigen wir, daß auch $\dot{y}_n = \bigwedge_{k \geqq n} y_k$ endlich ist. Es folgt daraus, daß auch die Elemente

$$\bigvee_n \dot{y}_n = \underline{\lim} y_n = \dot{y}, \quad \bigwedge_n \bar{y}_n = \overline{\lim} y_n = \bar{y}$$

endlich sind. Wir haben nach Satz 6

$$\varrho(\dot{y}_n, \bar{y}_n) = \lim_{m \to \infty} \varrho(y_n, y_{n+1}, \ldots, y_m),$$
$$\varrho(\dot{y}, \bar{y}) = \lim_{n \to \infty} \varrho(\dot{y}_n, \bar{y}_n) = 0,$$

also $\dot{y} = \bar{y}$, w. z. b. w.

Satz 8. *Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen das Element y konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(y, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}) = 0. \tag{22}$$

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung wurde im Beweise des vorigen Satzes festgestellt. Wir zeigen jetzt, daß (22) hinreichend ist. Aus (22) folgt zunächst (21), also ist y_n gegen ein gewisses Element $y' \in Y$ konvergent. Weiter folgt aus (22)

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(y, y_n) = 0$$

und wegen der Stetigkeit der Funktion ϱ ist $\varrho(y, y') = 0$ oder $y = y'$, w. z. b. w.

Satz 9. *Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen das Element y (*)-konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(y, y_n) = 0. \tag{23}$$

Beweis. Ist die Bedingung erfüllt, so kann eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen $\{n_k\}$ so angegeben werden, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho(y, y_{n_k}) < +\infty.$$

Dann folgt nach (20)

$$\varrho(y, y^n{}_k, y^n{}_{k+1}, \ldots, y_{n_{k+p}}) = \varrho(y, y_{n_k}, \ldots, y_{n_{k+p}}) - \varrho(y, y, \ldots, y)$$
$$\leqq 4\,\varrho(y, y_{n_k}) + \cdots + 4\,\varrho(y, y_{n_{k+p}}) \leqq 4 \sum_{i=k}^{\infty} \varrho(y, y_{n_i}).$$

Es ist also, nach Satz 8, $y_{n_k} \to y$. Da aber das gesagte auch für jede Unterfolge von $\{y_n\}$ wiederholt werden kann, haben wir $y_n \to y$ (*).

Umgekehrt, sei $y_n \to y\,(*)$. Für jede wachsende Folge $\{n_k\}$ von natürlichen Zahlen gibt es eine Unterfolge $\{n_{k_i}\}$ mit $y_{n_{k_i}} \to y$. Nach Satz 8 folgt daraus

$$\lim_{i\to\infty} \varrho(y, y_{n_{k_i}}) = 0.$$

Nach der Eigenschaft des reellen Zahlenkörpers ist die Folge $\varrho(y, y_n)$ gegen Null konvergent. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 10. *Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen ein gewisses Element $(*)$-konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(y_n, y_{n+p}) = 0. \tag{24}$$

Die Notwendigkeit folgt sofort aus dem vorstehenden Satz und (18). Umgekehrt, ist (24) erfüllt, so kann man leicht eine Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ angeben, für welche gilt

$$\lim_{k\to\infty} \varrho(y_{n_k}, \ldots, y_{n_{k+p}}) = 0.$$

Dann ist $y_{n_{k_i}} \to y$, $y \in Y$, also $\varrho(y_{n_k}, y) \to 0$. Damit folgt aus (24)

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(y, y_n) = 0, \quad y_n \to y\,(*).$$

Für weitere Betrachtungen brauchen wir das Distributivitätsaxiom III a. Es gelten die Ungleichungen:

$$\begin{cases} \varrho(y_1 \cup z_1, y_2 \cup z_2, \ldots, y_n \cup z_n) \leqq \varrho(y_1, \ldots, y_n) + \varrho(z_1, \ldots, z_n) \\ \varrho(y_1 \cap z_1, y_2 \cap z_2, \ldots, y_n \cap z_n) \leqq \varrho(y_1, \ldots, y_n) + \varrho(z_1, \ldots, z_n). \end{cases} \tag{25}$$

Es werde z. B. die erste Ungleichung bewiesen. Es ist

$$\begin{aligned} &\varrho(y_1 \cup z_1,\ y_2 \cup z_2,\ \ldots,\ y_n \cup z_n) \\ &= \varrho((y_1 \cup z_1) \cap \ldots \cap (y_n \cup z_n),\ y_1 \cup \ldots \cup y_n \cup z_1 \cup \ldots \cup z_n) \\ &\leqq \varrho((y_1 \cup z_1) \cap \ldots \cap (y_n \cup z_n),\ \bigvee_{1\leqq k\leqq n} y_k \cup \bigwedge_{1\leqq k\leqq n} z_k) \\ &+ \varrho(\bigvee_{1\leqq k\leqq n} y_k \cup \bigwedge_{1\leqq k\leqq n} z_k,\ y_1 \cup \ldots \cup z_n). \end{aligned}$$

Diese letzte Ungleichung folgt aus 2^0, denn wir haben nach dem Distributivitätsaxiom

$$\bigvee_k y_k \cup \bigwedge_k z_k = \bigwedge_k (y_1 \cup \ldots \cup y_n \cup z_k) \geqq \bigwedge_k (y_k \cup z_k).$$

Es folgt weiter

$$\begin{aligned} \varrho(y_1 \cup z_1, \ldots, y_n \cup z_n) &\leqq \varrho(\bigwedge_k y_k \cup \bigwedge_k z_k,\ \bigvee_k y_k \cup \bigwedge_k z_k) + \varrho(\bigwedge_k z_k,\ \bigvee_k z_k) \\ &\leqq \varrho(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \varrho(z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{aligned}$$

womit (25) bewiesen ist. Als Folgerung der bewiesenen Ungleichungen erhalten wir:

Satz 11. *Aus* $y_n \to y$, $y'_n \to y'$, $y \in Y$, $y' \in Y$ *folgt* $y_n \cup y'_n \to y \cup y'$. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Ungleichung

$$\varrho(y \cup y', y_n \cup y'_n, \ldots, y_{n+p} \cup y'_{n+p}) \leqq$$
$$\leqq \varrho(y, y_n, \ldots, y_{n+p}) + \varrho(y', y'_n, \ldots, y'_{n+p}).$$

Satz 12. *Aus den Axiomen* I (*für abzählbare A*), III a *und* 1°—5° *folgt* III b.

Beweis. Es sei $\bigwedge_n y_n \neq -\infty$, $y \in Y$ beliebig. Dann ist, unter Benutzung des vorigen Satzes,

$$\bigwedge_{n=1,2,\ldots} (y \cup y_n) = \lim_{n\to\infty} \bigwedge_{k \leqq n} (y \cup y_k)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (y \cup \bigwedge_{k \leqq n} y_k) = y \cup \bigwedge_{n=1,2,\ldots} y_n.$$

Ähnlich wird auch die zweite Hälfte von III b bewiesen.

Man kann nunmehr die Sätze 3, 4 mit Hilfe der metrischen Funktion formulieren. So ist z. B. $\overline{\lim}^* y_n$ unter den dortigen Voraussetzungen für eine gegebene Folge $\{y_n\}$ gleich der unteren Grenze der Elemente $y \in Y$, für die gilt

$$\varrho(y, y \cup y_n) \to 0.$$

Wir bemerken noch, daß unsere metrische Funktion $\varrho(y_1, y_2)$ immer durch eine äquivalente ersetzt werden kann, für die die Dreieckungleichung 2° für beliebige (auch unvergleichbare) y_1, y_2, y_3 gilt. Zu diesem Zwecke setzen wir nach bekannten Mustern [13])

$$\varrho^*(y, z) = \inf\{\varrho(y, y_1) + \varrho(y_1, y_2) + \cdots + \varrho(y_n, z)\}, \tag{26}$$

wo die untere Grenze auf alle endlichen Gruppen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von Elementen aus Y erstreckt ist. Man sieht dann unmittelbar ein, daß $\varrho^*(y, z) \leqq \varrho(y, z)$ ist; aus (18) folgt ferner $\varrho^*(y, z) \geqq \frac{1}{2}\varrho(y, z)$, so daß ϱ und ϱ^* in allen Konvergenzfragen äquivalent sind. Nach (26) gilt für ϱ^* die Dreieckungleichung; die Eigenschaften 1°—5° bleiben auch für ϱ^* erhalten, wie man leicht nachprüft [14]).

---

[13]) Vgl. z. B. A. H. Frink, Distance functions and the metrization problem, Bull. Amer. math. Soc. **43** (1937) 133—142.

[14]) Man kann noch weiter gehen und die Bedingung 2° durch die folgende schwächere ersetzen:

2′. *Es existiert eine positive Funktion* $\varphi(\varepsilon)$, *die für alle* $\varepsilon > 0$ *definiert ist, für die die Ungleichungen* $\varrho(y_1, y_2) < \varphi(\varepsilon)$, $\varrho(y_2, y_3) < \varphi(\varepsilon)$ *für* $y_1 \leqq y_2 \leqq y_3$ *die Ungleichung* $\varrho(y_1, y_3) < \varepsilon$ *zur Folge haben.*

Es existiert dann wieder eine zu ϱ äquivalente metrische Funktion $\varrho^*(y_1, y_2)$, für die 1°—5° und die allgemeine Dreieckungleichung erfüllt sind. Zum Beweise zeigt man zuerst, daß 2′ bei der Definition (17) sogar für beliebige y_1, y_2, y_3 gültig bleibt (mit $\varphi(\varphi(\varepsilon))$ statt $\varphi(\varepsilon)$). Weiter kann man die Überlegungen von A. H. Frink, a. a. O., S. 135—136 anwenden.

§ 4.

Unsymmetrische Verbände mit einer metrischen Funktion.

Unter einem „unsymmetrischen Verband" verstehen wir eine teilweise geordnete Menge $Y = \{y\}$, die alle in der Einleitung angegebenen Eigenschaften besitzt mit Ausnahme der Existenz einer endlichen unteren Grenze für beliebige zwei Elemente y_1, y_2. Es hat also auch hier $y_1 \cap y_2$ einen Sinn, kann aber unter Umständen $-\infty$ sein. Wir brauchen auch hier weitere Axiome; teilweise sind sie schwächer als die von § 3, teilweise gehen sie aber darüber hinaus (vgl. 6°). Unser Ziel ist wieder der Vergleich der durch die Ordnung und die metrische Funktion entstehenden Limesbildungen.

Für Y sollen die Axiome I und II und die erste Hälfte von III b gelten. Weiter soll in Y eine metrische Funktion $\varrho(y_1, y_2)$ für $y_1 \leqq y_2$ definiert sein, welche die Eigenschaften 1°, 2°, 4° von § 3 und darüber hinaus die folgenden besitzt:

3′
$$\varrho(y \cup y_1, y \cup y_2) \leqq \varrho(y_1, y_2)$$
$$\varrho(y_1, y_2) \leqq \varrho(y_1, y_3) \quad \text{für} \quad y_1 \leqq y_2 \leqq y_3.$$

5′ *Für keine monoton gegen $+\infty$ konvergierende Folge $\{y_n\}$ soll sein*

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(y_n, y_{n+p}) = 0.$$

6° *Jede monoton abnehmende Folge ist von unten beschränkt.*

Wir setzen für beliebige y_1, y_2

$$\bar{\varrho}(y_1, y_2) = \varrho(y_1, y_1 \cup y_2)\ ^{15}).$$

Dann ist die erste Hälfte von 3′ auch für beliebige y_1, y_2 richtig:

$$\bar{\varrho}(y_1, y_2) = \varrho(y_1, y_1 \cup y_2) \geqq \varrho(y \cup y_1, y \cup y_1 \cup y_2) = \bar{\varrho}(y \cup y_1, y \cup y_2).$$

Weiter ist leicht zu sehen:

(27) $\bar{\varrho}(y_1, y_2) = 0$ ist mit $y_2 \leqq y_1$ gleichbedeutend;

(28) $\bar{\varrho}(y_1, y_2) \leqq \bar{\varrho}(z_1, z_2)$, falls $z_1 \leqq y_1$, $y_2 \leqq z_2$.

Es gilt die Dreieckungleichung:

(29)
$$\bar{\varrho}(y_1, y_3) \leqq \varrho(y_1, y_1 \cup y_2 \cup y_3) \leqq \varrho(y_1, y_1 \cup y_2) + \varrho(y_1 \cup y_2, y_1 \cup y_2 \cup y_3) \leqq \bar{\varrho}(y_1, y_2) + \bar{\varrho}(y_2, y_3).$$

Da die Definitionen der Grenzwerte in §§ 1, 2 von der Existenz von $y_1 \cap y_2$ unabhängig waren, bleiben sie auch hier erhalten. Aus 6° folgt: Es ist für eine beliebige Folge $\{y_n\}$ immer $\overline{\lim}\, y_n > -\infty$ (dasselbe gilt auch für $\overline{\lim}^*\, y_n$). Es gibt insbesondere keine gegen $-\infty$ konvergenten Folgen.

---

[15]) Man könnte $\bar{\varrho}$ im Gegensatz zu dem in § 3 (17) definierten ϱ die *obere* metrische Funktion nennen.

Satz 13. *Damit für ein $y \in Y$ gilt $y \geqq \overline{\lim}\, y_n$, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\varrho}(y, y_n \cup \ldots \cup y_{n+p}) = 0. \tag{30}$$

Beweis. Aus (30) folgt $y \geqq \overline{\lim}\, y_n$. In der Tat, es sei

$$\bar{z}_n^m = y \cup y_n \cup \ldots \cup y_m, \ (m \geqq n);$$
$$\bar{z}_n = y \cup y_n \cup \ldots, \quad \bar{y}_n = y_n \cup y_{n+1} \cup \ldots.$$

Dann ist

$$\bar{\varrho}(\bar{z}_n^m, \bar{z}_n^{m+p}) = \bar{\varrho}(y \cup y_n \cup \ldots \cup y_m, y \cup y_n \cup \ldots \cup y_{m+p})$$
$$\leqq \bar{\varrho}(y, y \cup y_m \cup \ldots \cup y_{m+p}) \to 0.$$

Nach 5′ ist also $\bar{z}_n = \lim\limits_{m\to\infty} \bar{z}_n^m$ endlich. Nunmehr folgt aus der Ungleichung

$$\bar{\varrho}(y, \bar{z}_n) \leqq \bar{\varrho}(y, \bar{z}_n^m) + \bar{\varrho}(\bar{z}_n^m, \bar{z}_n)$$

mit Hilfe von (30) und 4°, daß $\bar{\varrho}(y, z_n) \to 0$ ist. Daraus folgt

$$\bar{\varrho}(y, \bigwedge_n \bar{z}_n) \leqq \inf_n \bar{\varrho}(y, \bar{z}_n) = 0,$$

also $\bigwedge\limits_n \bar{z}_n \leqq y$. Es ist aber

$$\bigwedge_{n=1,2\ldots} \bar{z}_n = \bigwedge_{n=1,2,\ldots} (y \cup \bar{y}_n) = y \cup \bigwedge_n \bar{y}_n = y \cup \overline{\lim}\, y_n$$

und deshalb $y \geqq \overline{\lim}\, y_n$.

Umgekehrt, aus $y \geqq \overline{\lim}\, y_n$ folgt, daß $\overline{\lim}\, y_n$ endlich ist und nach 4°, daß

$$\bar{\varrho}(y, \bar{y}_n) \leqq \bar{\varrho}(\overline{\lim}\, y_n, \bar{y}_n) \to 0$$

strebt. Umsomehr ist (30) erfüllt.

Satz 14. *Damit für ein $y \in Y$ die Ungleichung $y \geqq \overline{\lim}^*\, y_n$ gilt, ist die Bedingung*

$$\bar{\varrho}(y, y_n) \to 0 \tag{31}$$

notwendig und hinreichend.

Beweis. Es sei (31) erfüllt. Aus der Ungleichung $(m \geqq n)$

$$\varrho(y, y \cup y_n) + \varrho(y, y \cup y_{n+1}) + \cdots + \varrho(y, y \cup y_m) \geqq \varrho(y, y \cup y_n) +$$
$$+ \varrho(y \cup y_n, y \cup y_n \cup y_{n+1}) + \cdots + \varrho(y \cup y_n \cup \ldots \cup y_{m-1}, y \cup y_n \cup \ldots \cup y_m)$$
$$\geqq \bar{\varrho}(y, y_n \cup \ldots \cup y_m)$$

folgt leicht, daß es eine Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ gibt, für welche die Bedingung des vorigen Satzes zutrifft. Dann ist aber $y \geqq \overline{\lim}\, y_{n_k}$. Da diese Schlußweise auch für jede Teilfolge von $\{y_n\}$ anwendbar ist, haben wir $y \geqq \overline{\lim}^*\, y_n$.

Um die Notwendigkeit zu beweisen, setzen wir voraus, daß $\bar{\varrho}(y, y_n)$ nicht gegen Null konvergiert. Für eine gewisse Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ und ein gewisses $\varepsilon > 0$ ist dann $\bar{\varrho}(y, y_{n_k}) \geqq \varepsilon$. Aus dieser Folge kann, nach

dem vorigen Satz, keine Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ herausgegriffen werden, für welche $y \geqq \overline{\lim}\, y_{n_{k_i}}$ wäre. Das widerspricht aber der Definition von $\overline{\lim}^* y_n$.

Das letzte Ergebnis rechtfertigt die folgende Definition: Der größte (bzw. kleinste) metrische Limes $\varrho\, \overline{\lim}\, y_n$ (bzw. $\varrho\, \underline{\lim}\, y_n$) einer Folge ist die untere (obere) Grenze der Elemente $y \in Y$ bzw. $y' \in Y$ mit $\bar{\varrho}(y, y_n) \to 0$ bzw. $\varrho(y_n, y') \to 0$. Gibt es keine solchen Elemente, so setzen wir definitionsgemäß $\varrho\, \overline{\lim}\, y_n = +\infty$ bzw. $\varrho\, \underline{\lim}\, y_n = -\infty$[16]).

Aus der Definition folgt für jedes Paar y, y': $\varrho(y, y') = 0$, also $y' \leqq y$. Mithin ist

$$\varrho\, \underline{\lim}\, y_n \leqq \varrho\, \overline{\lim}\, y_n .$$

Die Folge ist metrisch konvergent gegen $y \in Y$, wenn hier das Gleichheitszeichen steht: $\varrho\, \underline{\lim}\, y_n = \varrho\, \overline{\lim}\, y_n = y$, mit anderen Worten, wenn zugleich $\bar{\varrho}(y, y_n) \to 0$ und $\bar{\varrho}(y_n, y) \to 0$ gilt.

Satz 14 kann man auch so ausdrücken: Es gilt für jede Folge y_n

$$\varrho\, \overline{\lim}\, y_n = \overline{\lim}^* y_n . \tag{32}$$

Satz 15. *Es ist, wenn die Folge $\{y_n\}$ nach oben beschränkt ist,*

$$\underline{\lim}^* y_n \leqq \varrho\, \underline{\lim}\, y_n \leqq \text{o-}\underline{\lim}\, y_n . \tag{33}$$

Beweis. Es sei $\bar{\varrho}(y_n, y) \to 0$. Dann ist nach (28) umsomehr $\bar{\varrho}(\bar{y}_n, y) \to 0$, wo $\bar{y}_n = y_n \cup y_{n+1} \cup \ldots$ bedeutet. Andererseits ist diese Zahlenfolge monoton nichtabnehmend, folglich ist $\bar{\varrho}(\bar{y}_n, y) = 0$, $y \leqq \bar{y}_n$ und $y \leqq \overline{\lim}\, y_n$. Dieselbe Schlußweise ist auch für jede Teilfolge von $\{y_n\}$ richtig, also ist $y \leqq \text{o-}\underline{\lim}\, y_n$. Damit ist die erste Hälfte von (33) bewiesen.

Es sei jetzt $y_0 = \underline{\lim}^* y_n$. Wir zeigen, daß $y_0 \leqq \varrho\, \underline{\lim}\, y_n$, d. h.

$$\bar{\varrho}(y_n, y_0) \to 0$$

ist, (wir dürfen offenbar y_0 endlich voraussetzen). Wäre $\bar{\varrho}(y_n, y_0) \to 0$ nicht erfüllt, so würde eine Folge $\{y_{n_k}\}$ existieren mit $\bar{\varrho}(y_{n_k}, y) \geqq \varepsilon > 0$. Es gibt eine weitere Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ mit $y_0 \leqq \underline{\lim}\, y_{n_{k_i}} = z_0$. Es folgt

$$\bar{\varrho}(y_{n_{k_i}}, y_0) \leqq \bar{\varrho}(y_{n_{k_i}}, z_0) \leqq \bar{\varrho}\Big(\bigwedge_{j \geqq i} y_{n_{k_j}}, z_0\Big) \to 0$$

für $i \to \infty$ nach 4°. Es ist also $\bar{\varrho}(y_{n_{k_i}}, y_0) \to 0$, was einen Widerspruch ergibt.

In speziellen Klassen von Verbänden kann man manchmal die Ungleichung (33) genauer fassen. So ist z. B. in den Verbänden des in § 3 besprochenen Typus stets

$$\varrho\, \underline{\lim}\, y_n = \underline{\lim}^* y_n, \quad \varrho\, \overline{\lim}\, y_n = \overline{\lim}^* y_n \tag{34}$$

[16]) Ist $\varrho\, \overline{\lim}\, y_n$ oder $\varrho\, \underline{\lim}\, y_n$ endlich, so besitzen sie selbst die für y bzw. y' angegebene Eigenschaft.

(das ist auch ohne 6° richtig). Beide Gleichungen sind hier äquivalent und folgen aus den auf S. 417 gemachten Bemerkungen.

Ein anderes Beispiel bilden die kompakten Verbände, für die gilt

Axiom IV. *Aus jeder Folge läßt sich eine (gegen ein Element von Y) konvergente Unterfolge aussondern.*

In kompakten Verbänden sind für jede Folge $\overline{\lim}\, y_n$ und $\underline{\lim}\, y_n$ endlich (6° ist also eine Folgerung von IV). Wir behaupten nun:

$$\varrho\,\underline{\lim}\, y_n = \underline{\text{o-lim}}\, y_n.$$

Es genügt, die Ungleichung $\varrho\,\underline{\lim}\, y_n \geqq \underline{\text{o-lim}}\, y_n$ zu beweisen. Es sei $\underline{\text{o-lim}}\, y_n = y$ und $\bar{\varrho}(y_n, y)$ nicht gegen Null konvergent. Wir können dann eine Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ aussondern derart, daß $\bar{\varrho}(y_{n_k}, y) \geqq \varepsilon > 0$ gilt. Es sei $\{y_{n_{k_i}}\}$ eine konvergente Teilfolge. Aus der leicht beweisbaren Stetigkeit der metrischen Funktion folgt dann $\bar{\varrho}(\lim y_{n_{k_i}}, y) > 0$. Das ist aber ein Widerspruch, denn es ist $y \leqq \lim y_{n_{k_i}}$.

Im ersten angegebenen Beispiel ist die metrische Konvergenz nichts anderes, als die (*)-Konvergenz, im zweiten fällt sie mit der oberen (*)-Konvergenz zusammen: $\varrho \lim y_n = y$ bedeutet $\overline{\text{o-lim}}^*\, y_n = \underline{\text{o-lim}}\, y_n = y$[17]).

Beispiel 6. Wir betrachten die Gesamtheit Y von allen abgeschlossenen nichtleeren Mengen y eines kompakten metrischen Raumes T. Die Beziehung $y_1 < y_2$ sei die natürliche (sie bedeute dasselbe wie $y_1 \subset y_2$ und $y_1 \neq y_2$). Wir setzen für $y_1 \leqq y_2$

$$\varrho(y_1, y_2) = \inf r; \quad y_2 \subset U_r(y_1), \tag{35}$$

wo r alle positiven Zahlen durchläuft, die der Bedingung $y_2 \subset U_r(y_1)$ genügen, und $U_r(y_1)$ die r-Umgebung der Menge y_1 ist, d. h. die Gesamtheit der Punkte von T, die einen Abstand $< r$ von der Menge y_1 haben. Auf diese Weise erhält man einen unsymmetrischen Verband[18]), den wir den Hausdorffschen Mengenraum $\mathfrak{M}(T)$ von T nennen wollen[19]). Die obere Grenze $\vee A$ einer Menge $A = \{y\}$ ist hier die abgeschlossene Hülle der Summe $\overline{\sum y}$, die untere Grenze der Durchschnitt Πy der Mengen y aus A. Die Axiome I, II, III b (erste Hälfte) sind erfüllt. Nur II bedarf eines Beweises. Es sei $A = \{y\} \subset Y$. Wir wählen eine in $\sum y$ überall dichte Punktfolge $\{t_n\}$ und bestimmen die entsprechenden Mengen $y_n \in A$ auf die Weise, daß $t_n \in y_n$ wird. So erhalten wir die abzählbare Menge $B = \{y_n\}$ mit $\vee B = \vee A$. Mit Hilfe des Satzes: Eine wohlgeordnete fallende Folge von abgeschlossenen Untermengen eines separablen Raumes ist höchstens abzählbar, ist es möglich, eine abzählbare Menge $B' = \{y'_n\} \subset A$ anzugeben, für welche $\wedge B' = \wedge A$

[17]) Vgl. Fußnote 7).

[18]) Für zwei punktfremde abgeschlossene Mengen y_1, y_2 ist $y_1 \frown y_2 = -\infty$.

[19]) Vgl. Hausdorff, Mengenlehre, 3. Aufl., Berlin und Leipzig 1935, S. 145—150, Alexandroff und Hopf, Topologie, Berlin 1935, S. 111—116.

ist. Dann ist für $A' = B + B'$ zugleich $\vee A' = \vee A$ und $\wedge A' = \wedge A$, womit II bewiesen ist. Auch IV ist für den Verband $\mathfrak{M}(T)$ richtig[20]). Die Axiome 1°, 2°, 3′, 5′ folgen fast unmittelbar aus der Definition (35) der Funktion ϱ. Auch 4° ist richtig, wie man unter Benutzung des Heine-Borelschen Satzes leicht beweisen kann.

Für die Hausdorffsche Metrik (35) ist offenbar die folgende Bedingung erfüllt:

$$\varrho(y, \bigvee_{n=1,2,\ldots} y_n) = \sup_n \varrho(y, y_n).$$

Deshalb ist in $\mathfrak{M}(T)$ nach Satz 13 und 14 $\overline{\text{o-lim}}\, y_n = \overline{\text{o-lim}}^*\, y_n$. Aus der allgemeinen Theorie folgt somit für beliebige $\{y_n\}$:

$$\underline{\varrho \lim}\, y_n = \underline{\text{o-lim}}\, y_n; \quad \overline{\varrho \lim}\, y_n = \overline{\text{o-lim}}\, y_n.$$

Insbesondere, die metrische Konvergenz fällt mit der oberen Konvergenz zusammen (die letzte wird in $\mathfrak{M}(T)$ auch die topologische Konvergenz der Mengenfolge $\{y_n\}$ genannt).

Beispiel 7. Wir betrachten die Gesamtheit Y von allen nach oben halbstetigen reellen Funktionen $y(t)$, die in einem kompakten metrischen Raum $T = \{t\}$ definiert sind und Werte $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ annehmen dürfen. $y_1 < y_2$ soll bedeuten, daß $y_1(t) \leqq y_2(t)$, aber nicht identisch $y_1(t) = y_2(t)$ ist. Mit dieser Ordnung wird Y ein Verband. Man überzeugt sich leicht, daß die Axiome I, II, III b (erste Hälfte) und IV erfüllt sind.

Wir wollen jedoch zeigen, daß dieser Verband kein selbständiges Interesse besitzt, da er sich auf den Hausdorffschen Mengenraum zurückführen läßt. Für $y \in Y$ konstruieren wir die Mengen

$$A_y = \{(t, x)\}, \quad t \in T, \; x \leqq y(t),$$

die als Untermengen des Produktraumes $T \times X$ anzusehen sind (X ist die abgeschlossene Zahlengerade $-\infty \leqq x \leqq +\infty$). Die Mengen A_y sind in $T \times X$ abgeschlossen und $y_1 < y_2$ ist mit $A_{y_1} \subset A_{y_2}$, $A_{y_1} \neq A_{y_2}$ gleichbedeutend. Deshalb ist Y einer Untermenge des Hausdorffschen Mengenraumes $\mathfrak{M}(T \times X)$ isomorph, nämlich der Gesamtheit von allen Mengen A_y. Daraus folgen wieder die Axiome I, II, III b, IV. Weiter sehen wir, daß in Y eine metrische Funktion eingeführt werden kann, die alle nötigen Eigenschaften besitzt. In der Tat, wir brauchen nur eine Schränkungstransformation der Geraden X in die abgeschlossene Strecke $(0, 1)$ durchzuführen. Dadurch werden die Mengen A_y in beschränkte verwandelt und ihre Hausdorffsche Metrik wird dann auf die Elemente $y \in Y$ übertragen.

[20]) Vgl. Alexandroff und Hopf, a. a. O. S. 115.

(Eingegangen am 9. Oktober 1944.)